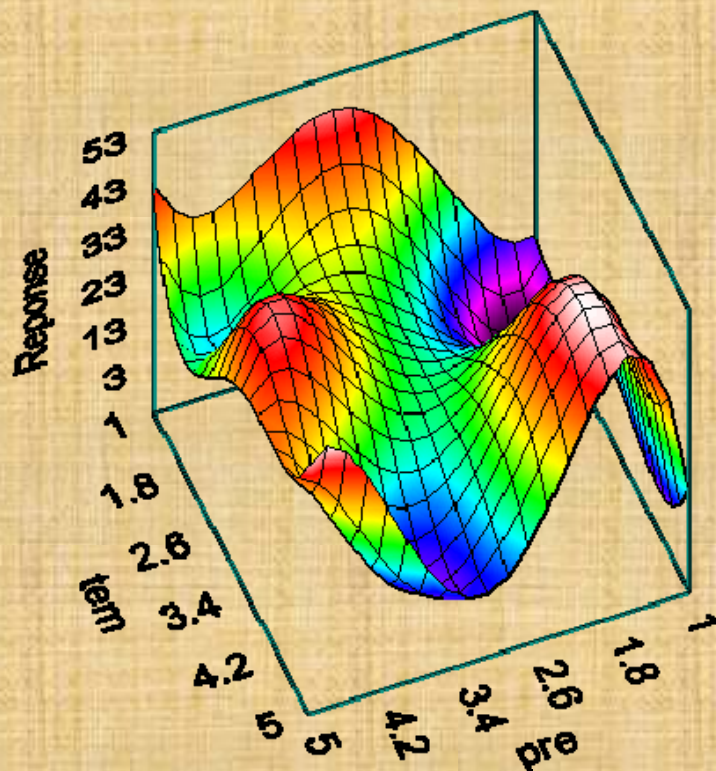


**Maurice
PILLET**

Les plans d'expériences par la méthode **TAGUCHI**



Les plans d'expériences par la méthode TAGUCHI

Maurice Pillet – Edition 2011

ISBN - 978-2-9539428-0-4

Du même auteur

Pillet Maurice

Appliquer la Maitrise Statistique des processus
4eme Edition, Editions d'organisation, 2005, 600 pages.

Duret Daniel, Pillet Maurice

Qualité en Production - de l'iso 9000 à Six Sigma
4eme édition, Editions d'organisation, 2005, 450 pages.

Pillet Maurice

Six Sigma - Comment l'appliquer
Editions d'Organisation, 2003, 480 pages,

Pillet Maurice, Bonnefous Chantal, Bonnefous Pascal, Courtois Alain,

Gestion de Production
5ème Edition, Editions d'organisation, 2011, 480 pages,

Pillet Maurice

Améliorer la productivité – Déploiement industriel du tolérancement inertiel
Editions d'Organisation, 2010, 220 pages,

Sites internet

<http://web.qlio.univ-savoie.fr/pillet/>

<http://www.iut-acy.univ-savoie.fr>

<http://www.symme.univ-savoie.fr/>

Maurice Pillet

CFPIM

Professeur des Universités

Université de Savoie (IUT Annecy – département QLIO)

Ancien élève de l'ENS Cachan

Les plans d'expériences par la méthode TAGUCHI

Sommaire

Chapitre 1

Introduction aux plans d'expériences 13

1. Plans d'expériences et Qualité Totale..... 13

1.1. Plan d'expériences : un outil dans une stratégie globale 13

1.2. L'évolution des outils Qualité 14

1.3. Les plans d'expériences parmi les outils de la qualité..... 16

1.4. A quoi sert un plan d'expériences ?..... 17

2. Petit historique des plans d'expériences 18

3. Etude d'un phénomène..... 18

3.1. La démarche expérimentale..... 18

3.2. Méthode traditionnelle 19

3.3. La méthode des plans d'expériences 21

3.4. Principaux avantages des plans d'expériences..... 21

3.5. Définitions 21

Chapitre 2

Plans factoriels complets 23

1. Plans complet 2^2 23

1.1. Que signifie plan complet..... 23

1.2. Etude du fonctionnement d'un pistolet à peinture 24

1.3. Choix des expériences 25

1.4. Matrice d'expériences.....	28
1.5. Résultats de l'étude.....	28
1.6. Calcul des effets avec la notation de YATES	30
1.7. Méthode générale de calcul des effets	32
1.8. Etude de l'installation de vernissage avec interaction.....	34
1.9. Formule générale de calcul des interactions.....	36
1.10. Graphe de l'interaction	36
2. Plans complets 2^3	38
2.1. Définition des objectifs et des moyens	38
2.2. Synthèse du "Savoir-faire"	39
2.3. Construction du plan.....	39
2.4. Conduite des essais.....	40
2.5. Dépouillement et interprétation	40
2.6. Validation des résultats	43
3. Cas général des plans complets.....	44
3.1. Construction d'un plan complet.....	44
3.2. Premier exemple : 2 facteurs, 3 niveaux	44
3.3. Deuxième exemple.....	46
4. Modèle matriciel du système étudié.....	50
4.1. Notation.....	50
4.2. Application sur un modèle simple	50
4.3. Calcul de la réponse théorique	52
4.4. Cas des interactions du troisième ordre	53
4.5. Modélisation entre les niveaux des facteurs.....	53
5. Modélisation polynomiale.....	57
5.1. Principe	57
5.2. Application	57
Chapitre 3	
Les plans d'expériences fractionnaires.....	59
1. Pourquoi des plans fractionnaires ?.....	59
2. Condition sur le nombre de degrés de liberté.....	61
3. Condition d'orthogonalité.....	62
3.1. Définition de l'orthogonalité	62
3.2. Méthode de vérification de l'orthogonalité	63
3.3. Cas des plans à deux et trois niveaux	65

4. Recherche de plans orthogonaux minimums	66
4.1. Cas des nombres de niveaux premiers entre eux.....	66
4.2. Cas des interactions disjointes.....	67
4.3. Conclusions	68
5. Plans de type 2^n, notions d'alias	69
5.1 Fractionnement d'un plan.....	69
5.2. Notions d'alias.....	71
5.3. Notion de résolution.....	75
5.4. Règle de détermination des alias	75
6. Calcul d'un plan fractionnaire 2^{n-p}	76
6.1. Problème	76
6.2. Recherche des plans possibles	76
6.3. Plan fractionnaire correspondant.....	76
Chapitre 4	
Plans fractionnaires, méthode de Taguchi	79
1. L'apport de Taguchi aux plans d'expériences.....	79
2. Graphes linéaires associés à un modèle	80
2.1. Représentation des facteurs.....	80
2.2. Représentation des interactions	80
2.3. Représentation d'un modèle.....	80
3. Les tables orthogonales de Taguchi	81
3.1. Présentation proposée par Taguchi.....	81
4. Construction d'un plan à partir des tables de Taguchi	84
4.1. Définition du modèle.....	84
4.2. Etablissement du graphe linéaire du modèle	84
4.3. Recherche de la table de Taguchi adaptée	84
4.4. Affectation de colonne à chaque coefficient	85
5. Expérimentation et interprétation	86
5.1. Notions d'aléarisation.....	87
5.2. Calcul des coefficients du modèle	87
5.3. Interprétation du modèle	89
6. Les alias dans les plans de Taguchi	90
6.1. Utilisation du triangle des interactions.....	90
6.2. Application	91

6.3. Comment s'apercevoir qu'il y a confusion.....	93
des actions ?	93
6.4. Les plans de résolutions IV	94
7. Les différentes tables et leurs propriétés.....	96
7.1. Etude des interactions impossible.....	96
7.2. Etude des interactions limitée.....	96
7.3. Etude des interactions possible.....	97
8. Stratégie et plans d'expériences.....	97
8.1. Les deux objectifs de base	97
8.2. Le choix d'une stratégie	99
8.3. Les différentes approches.....	101
9. Exemple de mise en place de stratégie.....	102
9.1. Exposé du problème : injection de pièces plastiques.....	102
9.2. Recherche du plan adapté	102
9.3. Conduite des essais.....	104
9.4. Dépouillement.....	104
9.5. Interprétation	105
9.6. Expérience de confirmation.....	105
10. Cas des réponses qualitatives.....	106
10.1. Réponses quantitatives et qualitatives	106
10.2. Etude de l'aspect d'une installation de peinture	106
10.3. Interprétation du plan d'expériences.....	108
10.4. Transformation OMÉGA	111
11. Réalisation des essais par blocs.....	112
11.1. Exposé du problème.....	112
11.2. Réalisation des essais en blocs	112
12. Désaliasser un plan d'expériences.....	113
12.1. Le problème.....	113
12.2. Lever le doute par un plan complémentaire	114
13. Minimisation des risques.....	116
 Chapitre 5	
Les plans produits	119
1. L'ingénierie de la qualité selon le Dr Taguchi.....	119
1.1. Les apports fondamentaux du Dr Taguchi	119

1.2. Notion de fonction perte	120
1.3. Fonction perte dans le cas où l'optimum est un minimum.....	125
1.4. Fonction perte dans le cas où l'optimum est un maximum.....	125
1.5. Résumé.....	127
1.6. Notion de bruit.....	127
1.7. Notion de robustesse.....	128
2. Les plans produits	130
2.1. Origine des plans produits du Dr Taguchi	130
2.2. Construction d'un plan produit.....	130
3. Rapport Signal/Bruit.....	133
3.1. Notions de base	133
3.2. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est un minimum (Type S)	134
3.3. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est un maximum (Type L)	134
3.4. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est une nominale.....	135
3.5. Règle d'utilisation du rapport Signal/Bruit (S/N).....	137
3.6. Résumé des différentes situations.....	137
4. Méthode d'utilisation des plans produits.....	138
4.1. Identification des facteurs bruits.....	138
4.2. Etablissement du plan produit	138
5. Plans produits - cas d'un extremum	140
5.1. Minimisation et maximisation	140
5.2. Exemple 1 - Cas d'une recherche de minimum.....	141
5.3. Exemple 2 - Cas d'une recherche de maximum.....	145
6. Plans produits - Recherche de nominale.....	149
6.1. Recherche de nominale ou de cible	149
6.2. Exemple de recherche de nominale	150
6.3. Choix du ratio S/N	151
6.4. Création du plan d'expériences	151
6.5. Analyse des résultats.....	152
6.6. Essai de confirmation.....	153
7. Utilisation des plans produits dans le cas du facteur "temps"	154
7.1. Le temps comme un facteur bruit	154
7.2. Séparer S/N et S/T	155
7.3. Exemple d'application	155

Chapitre 6**Les caractéristiques dynamiques 157****1. Caractéristiques statiques et dynamiques 157**

1.1. Les limites de l'optimisation statique 157

1.2. L'optimisation dynamique 159

2. L'optimisation dynamique..... 160

2.1. Les différents types de facteurs 160

2.2. Robustesse dans le cas dynamique 161

2.2. Le ratio S/N dans le cas dynamique 162

2.3. Optimisation dynamique 163

2.4. Les différents cas de figure 165

3. Application de l'optimisation dynamique 167**Chapitre 7****Analyse de la variance..... 171****1. L'analyse de la variance, pourquoi ? 171****2. Cas où il n'y a qu'un seul facteur contrôlé 172**

2.1. L'hypothèse nulle 172

2.2. Cas d'1 facteur à k niveaux..... 174

2.3. Variance globale 174

2.4. Variance résiduelle 175

2.5. Variance entre échantillons 175

2.6. Equation fondamentale d'analyse de la variance..... 175

2.7. Test de Snedecor 175

2.8. Tableau d'analyse de la variance..... 177

2.9. Application 177

3. Cas des plans d'expériences sans répétition..... 178

3.1. Etude sur un exemple 178

3.2. Variance résiduelle 178

3.3. Variance entre échantillons pour un facteur 179

3.4. Variance entre échantillons pour une interaction 179

3.5. Analyse de la variance 180

4. Cas des plans d'expériences avec répétitions 182**5. Exemple d'application de l'analyse de la variance - Méthode du regroupement 184****6. Prévion du nombre de répétitions 186**

6.1. Hypothèses 186

6.2. Etude sur un exemple	186
---------------------------------	-----

Chapitre 8

Construction de plans non standard	189
---	------------

1. Pourquoi construire des plans particuliers.....	189
---	------------

2. Technique de modification des graphes linéaires.....	190
--	------------

2.1. Graphes linéaires et interactions.....	190
---	-----

2.2. Rupture d'une ligne.....	190
-------------------------------	-----

2.3. Formation d'une ligne	191
----------------------------------	-----

2.4. Déplacement d'une ligne.....	191
-----------------------------------	-----

2.5. Exemple de création de graphe linéaire adapté	192
--	-----

3. Méthode de fusion de colonnes.....	193
--	------------

3.1. Construction d'une colonne à 4 niveaux.....	193
--	-----

3.2. Application à partir de la table L16	194
---	-----

3.3. Construction d'une colonne à 8 niveaux.....	196
--	-----

3.4. Construction d'une colonne à 9 niveaux.....	197
--	-----

3.5. Les interactions dans les plans à 4, 8 et 9 niveaux	199
--	-----

4. Les techniques de modification des tables standard	201
--	------------

4.1. Technique des niveaux fictifs	201
--	-----

4.2. Méthode des facteurs composés.....	202
---	-----

5. Méthode de l'extraction.....	204
--	------------

5.1. Etude d'un problème	204
--------------------------------	-----

5.2. Solution par la méthode de l'extraction.....	204
---	-----

6. Les plans arborescents	205
--	------------

6.1. Exposé du problème.....	205
------------------------------	-----

6.2. Construction du graphe de l'application	206
--	-----

6.3. Calcul des effets	208
------------------------------	-----

7. Les autres plans d'expériences.....	208
---	------------

7.1. Les matrices d'Hadamard	208
------------------------------------	-----

7.2. Méthode de Placket et Burman	209
---	-----

Chapitre 9

Mise en œuvre des plans d'expériences	211
--	------------

1. Définition des objectifs et des moyens	211
--	------------

1.1. Les acteurs de l'étape	211
1.2. La définition des objectifs	212
2. Synthèse du savoir-faire	213
2.1. Les acteurs de l'étape	213
2.2. Les résultats attendus	213
3. Construction du plan	215
3.1. Les acteurs de l'étape	215
3.2. Les résultats attendus	215
4. Conduite des essais	215
4.1. Les acteurs de l'étape	215
4.2. La validation du nombre de répétition	216
4.3. Les résultats attendus	217
5. Dépouillement et interprétation	218
5.1. Les acteurs de l'étape	218
5.2. L'interprétation.....	218
6. Validation des résultats obtenus	219
6.1. Pourquoi valider les résultats obtenus.....	219
6.2. Les acteurs de cette étape	219
6.3. Les résultats attendus	219
7. Mise en œuvre et suivi	220
Annexes - Principales tables de Taguchi	221
Annexes - Tables de Snedecor.....	241
Annexes - Résumés	243
Annexes - Bibliographie	251

Chapitre 1

Introduction aux plans d'expériences

1. Plans d'expériences et Qualité Totale

1.1. Plan d'expériences : un outil dans une stratégie globale

Au cours de ces dernières années, les entreprises industrielles ont été confrontées à une concurrence de plus en plus féroce. L'internationalisation de la compétition, la diminution de la demande due à la crise et la course au développement, ont poussé les entreprises à rechercher des atouts leur permettant de gagner la partie. La recherche de la qualité est alors devenue un point-clé de la compétitivité des entreprises. Cette recherche ne date pas d'aujourd'hui. En effet, la qualité a toujours été un objectif important depuis que l'homme fabrique des objets. Cependant, le nouveau contexte de concurrence mondiale ranime cette quête de la qualité en demandant plus de formalisme dans son approche.

Cette recherche a été un des axes fondamentaux de la progression des entreprises ces dix dernières années. Les progrès réalisés couvrent l'ensemble des domaines, depuis l'organisation de l'entreprise jusqu'au pilotage des procédés, en passant par de nouvelles relations entre les clients et les fournisseurs. Chaque secteur de l'entreprise est concerné et il est devenu impossible pour une entreprise d'assurer la qualité de ses produits ou de ses services sans une organisation efficace fondée sur un système qualité structuré.

Cependant, la condition de réussite passe surtout par la dynamique créée sous l'impulsion du chef d'entreprise, et par l'utilisation adaptée de méthodes et d'outils ayant fait leurs preuves.

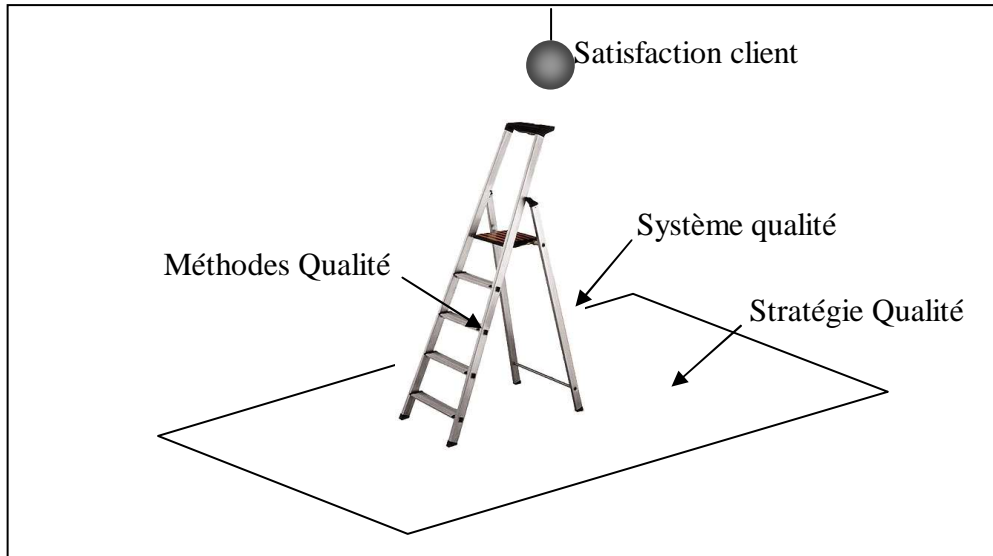


Figure 1.1- Système Qualité et Outils Qualité

Une démarche qualité performante peut être schématisée par un escabeau (figure 1.1). Pour atteindre la qualité totale, il faut une cohérence entre le système qualité et les méthodes et outils. La qualité se construit autour d'un système qualité (la structure de l'escabeau) qui apporte la stabilité et sur lequel chaque outil prendra sa place. La normalisation internationale ISO 9000 apporte aux industriels une aide précieuse pour l'établissement de ce système qualité. Mais un escabeau sans marche n'est pas très utile. Les outils et les méthodes "Qualité" permettent de construire - pas à pas - la qualité des produits et des services. La méthode des plans d'expériences représente un outil parmi d'autres qui permet d'améliorer de façon importante la qualité des produits et des procédés.

On peut compléter l'image de l'escabeau par le sol sur lequel il repose qui doit être stable. Il représente la stratégie de l'entreprise. Sans stratégie solide, sans volonté de la direction, toute démarche qualité est vouée à la même fin qu'un escabeau posé sur un sol trop meuble.

1.2. L'évolution des outils Qualité

L'amélioration permanente, pour répondre à la demande toujours plus précise des consommateurs, a poussé les industriels à faire évoluer les concepts et les outils de la qualité. Si nous regardons le chemin parcouru depuis la dernière guerre, nous constatons deux évolutions :

- la première est le stade de la vie du produit auquel on recherche la qualité ;
- la deuxième est une évolution vers plus de mesures.

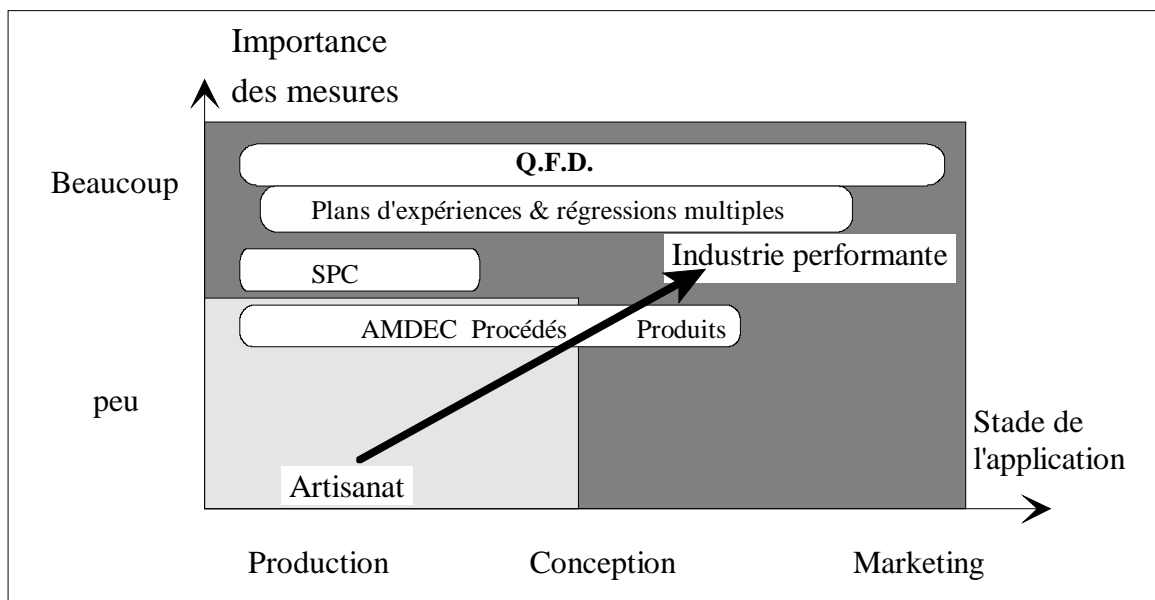


Figure 1.2 - Place des outils de la maîtrise de la qualité

1.2.1. Première évolution, recherche de la qualité dès la conception

Le contrôle de la qualité s'est d'abord intéressé aux produits finis. On a mis en place des contrôles sur ceux-ci pour éviter à un éventuel produit défectueux d'arriver chez le client. Les méthodes utilisées vont du contrôle à 100% à un contrôle statistique par échantillonnage mais n'assurent pas toujours 100% de produits conformes.

On s'est alors aperçu qu'il était préférable de faire directement de la qualité. Le contrôle des produits s'est donc porté davantage sur la maîtrise des procédés, par l'introduction des méthodes d'auto-contrôle. Dès ce stade, il a fallu disposer de méthodes formelles qui permettaient la compréhension puis la maîtrise des procédés. Les statistiques ont alors offert un outil idéal avec le S.P.C. (Statistical Process Control) pour la maîtrise et le suivi des procédés. Il manquait cependant un outil adapté à leur compréhension. Les plans d'expériences viennent à point pour combler cette lacune.

Poursuivant l'effort vers la qualité totale, il est apparu que le meilleur moment pour établir la qualité était la conception de celui-ci, voire la définition des spécifications. La notion de qualité allait donc évoluer en faisant apparaître des notions nouvelles telles que la notion de robustesse développée par Taguchi. Il n'est pas suffisant de développer un produit parfait dans des conditions de laboratoire, il faut qu'il fonctionne également dans une atmosphère bruitée, perturbée qui sera son lot quotidien. La qualité à la conception s'établit principalement lorsqu'on définit les paramètres du produit (cotes, jeux, tension, valeur d'une résistance) et les tolérances qu'on admet sur ces valeurs. Trop souvent cette phase fondamentale du travail est sous-estimée dans les conceptions traditionnelles. Et pourtant, c'est précisément cette phase qui détermine le niveau de qualité du produit.

Pour aborder cette phase dans les meilleures conditions, il faut au concepteur un outil lui permettant de mesurer l'importance de chacun des paramètres. Ces paramètres sont généralement nombreux et difficilement modélisables par les lois classiques de la physique ou de la mécanique. Le concepteur a donc besoin d'une méthode expérimentale, peu coûteuse en expériences, qui lui permettra rapidement de mesurer l'influence de chacun des paramètres, et ainsi de les fixer aux valeurs les plus favorables. Encore une fois, les plans d'expériences vont fournir une méthode sans équivalent pour aider le concepteur dans cette phase fondamentale.

Ainsi, les plans d'expériences offrent à l'ingénieur et au technicien une méthodologie de conduite d'essais qui s'inscrit parfaitement dans le processus de qualité à tous les stades de la vie d'un produit :

- au stade de la conception pour permettre de fixer les paramètres de façon optimale,
- au stade de la production comme complément indispensable des méthodes de maîtrise statistique des procédés (M.S.P. ou S.P.C.).

1.2.2. Deuxième évolution, plus de mesures

Trop souvent le technicien se satisfait de notions floues de type tout ou rien ou d'appréciations verbales non chiffrées. C'est vrai en production où le concept de capacité d'un moyen de production se résume souvent à une impression. C'est également vrai en conception où la connaissance des phénomènes est liée à l'expérience non-écrite des "spécialistes".

De plus en plus, l'industriel soucieux de qualité ne peut se satisfaire de ces approximations. Il recherche des réponses chiffrées indépendantes et objectives. Il lui faut donc **mesurer**.

Pour cela, deux approches sont couramment réalisées. La première consiste à mettre en place des indicateurs de performance qui permettent d'évaluer de manière formelle une situation. C'est cette approche qui est suivie pour l'évaluation des capacités avec l'utilisation d'indicateurs tels que le Cpk bien connu en Maîtrise Statistique des Procédés. Une autre approche consiste à modéliser le comportement des procédés ou des produits afin de mieux prévoir leurs performances. Encore une fois, les plans d'expériences vont être d'un grand secours.

1.3. Les plans d'expériences parmi les outils de la qualité

Phases de développement	PLANS D'EXPÉRIENCES	QFD	AMDEC PRODUIT	AMDEC PROCÉDÉ	MSP
Définition du produit	1	3			
Définition des caractéristiques	3	3			
Validation du produit	3		3		
Définition du processus		3			1
Validation du processus	3			3	2
Définition des spécifications	3	3			2
Suivi et pilotage en production					3

1 Utilisation Mineure

3 Utilisation Majeure

Figure 1.3 - Outils Qualité et vie d'un produit

La figure 1.3 fait apparaître la plage d'utilisation des principaux outils qualité dans le développement d'un produit et des processus de production associés. Sur cette figure, nous avons relevé les principales étapes de la vie d'un produit, et nous avons déterminé l'utilisation de chacun des outils en fonction de son intérêt pour la phase concernée. Chaque fois que l'outil est utile, nous avons grisé le cadre. Nous avons également établi une hiérarchie dans l'intérêt de l'outil en graduant l'importance de 1 à 3. Chaque outil a une plage d'application bien déterminée, et l'ensemble des outils couvre ainsi la totalité du processus de création et de fabrication d'un produit. On note l'importance des plans d'expériences et l'aspect complémentaire des différents outils. La méthode des plans d'expériences ne trouvera sa pleine puissance que si les autres plages de la vie du produit ont été couvertes correctement avec les outils adaptés.

1.4. A quoi sert un plan d'expériences ?

Dans toutes les entreprises, et quel que soit le secteur d'activité, le technicien ou l'ingénieur est amené à comprendre comment réagit un **système** en fonction des différents **facteurs** qui sont susceptibles de le modifier. Pour vérifier l'évolution du processus, il mesure une **réponse**, et, à partir de différents essais, il va tenter d'établir des relations de cause à effet entre la (ou les) réponse(s) et les différents facteurs.

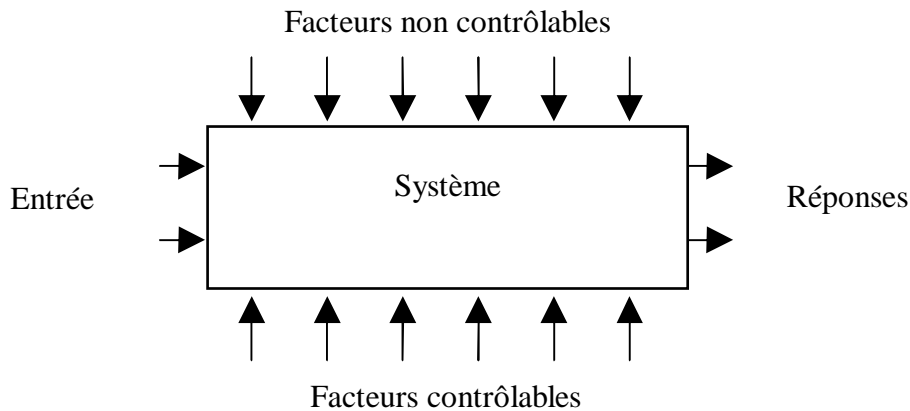


Figure 1.4 - L'environnement du système

Parmi les facteurs, on distinguera :

- les facteurs contrôlables qui dépendent directement du choix du technicien (choix d'un matériau, d'une pression...);
- les facteurs non contrôlables qui varient indépendamment des choix du technicien (conditions climatiques, environnement d'utilisation...);
- les facteurs d'entrées telles que la matière première dans un processus de fabrication.

Il n'est pas simple de réaliser de telles relations entre réponses et facteurs, surtout s'il existe des interactions entre les facteurs. Les plans d'expériences permettent de réaliser ce type de relations, en minimisant le nombre d'expériences tout en maximisant la précision du résultat.

Le domaine de validité est très vaste. On peut rapidement citer les applications les plus classiques dans le domaine de la conception des produits :

- test de différentes configurations de base ;
- choix de matériaux pour l'amélioration du fonctionnement ;
- détermination des tolérances de fonctionnement d'un produit.

On l'applique aussi dans la conception et l'amélioration des processus de production :

- diminution du pourcentage de défectueux dans une ligne de production ;
- diminution de la variabilité d'une machine ;
- choix des outillages.

2. Petit historique des plans d'expériences

La méthode des plans d'expériences n'est pas une technique nouvelle. Elle date en fait du début du siècle avec les travaux de Fisher (1925). Les premiers utilisateurs de ces méthodes furent des agronomes qui ont vite compris l'intérêt des plans d'expériences et notamment la réduction du nombre d'essais lorsqu'on étudie de nombreux paramètres. En effet, les essais en agronomie sont très consommateurs de paramètres. L'étude du rendement d'un blé nécessite la prise en compte du type de terrain, des différents traitements, de l'ensoleillement, etc. De plus, dans ce type d'expérimentation, il faut attendre un an avant de connaître les résultats. Il était donc indispensable de réduire le nombre d'essais sans perdre en précision et d'être capable de planifier d'une façon formelle la campagne d'essais. Mais cette technique est restée relativement confidentielle et n'a pas réussi à pénétrer de façon significative les industries occidentales avant les années soixante-dix.

Une des raisons de ce manque d'intérêt des industriels pour la méthode était probablement l'aspect trop théorique de l'approche proposée. Il a fallu les travaux du Docteur Taguchi dans les années soixante au Japon pour que les plans d'expériences pénètrent nos usines. Taguchi avec le pragmatisme qui caractérise les Japonais a su simplifier et clarifier l'utilisation des plans d'expériences. Son apport est considérable et la diffusion à grande échelle de ses travaux aux Etats-Unis date de la fin des années soixante-dix. Aujourd'hui, les plans d'expériences représentent un outil indispensable à tout industriel, du plus petit au plus grand, soucieux d'améliorer la qualité de ses produits.

Au cours de ces dernières années, la méthode des plans d'expériences s'est imposée à l'ensemble des industriels. Autrefois confidentielle, elle connaît aujourd'hui un développement spectaculaire. La précision des résultats obtenus, la pertinence des informations apportées par cette méthode contribuent à son développement actuel dans tous les secteurs d'activités.

La méthode, une fois comprise, constitue une étape irréversible dans la carrière du technicien qui ne pourra plus envisager de réaliser des essais sans utiliser un plan d'expériences.

3. Etude d'un phénomène

3.1. La démarche expérimentale

La démarche expérimentale reste la méthode royale d'acquisition des connaissances dans le domaine industriel. De façon naturelle, l'ingénieur fonde sa démarche d'acquisition des connaissances sur des essais en avançant progressivement, puis, il réoriente ses expériences en fonction des résultats obtenus. Il recherche en général à augmenter la productivité de ses essais. Pour cela, il doit :

- faire un minimum d'essais ;
- obtenir un maximum de précision sur les résultats ;
- être capable de mettre en évidence des phénomènes secondaires comme des interactions entre facteurs.

Les difficultés de l'expérimentateur ne s'arrêtent pas à la planification des essais. Une fois ceux-ci réalisés, il faut interpréter les résultats. Il n'est pas rare de se retrouver devant une pléthore de mesures et de ne pouvoir en tirer un quelconque résultat. C'est à ce moment-là qu'on se dit souvent : « Les essais que j'ai réalisés sont inutiles, par contre, j'aurais dû faire d'autres essais ! »

Une bonne démarche d'acquisition des connaissances devra fournir des résultats aisés à interpréter. Ils devront être également faciles à présenter aussi bien à des spécialistes qu'à des non-spécialistes. Tous les industriels connaissent ces interrogations, aussi, il est judicieux de se poser quelques questions :

- quelle stratégie d'essais adopter pour arriver rapidement aux résultats attendus ?
- n'existe-t-il pas de meilleures stratégies que d'autres ?
- quel est le nombre minimum d'essais qui doivent être réalisés pour aboutir aux résultats ?
- ne peut-on pas éviter de réaliser des essais inutiles ?
- comment améliorer la précision de mes résultats ?

La méthode des plans d'expériences apporte une méthodologie capable de répondre à ces questions. Cette méthodologie, sans équivalent, permet d'atteindre une meilleure connaissance du système observé par un minimum d'essais et un maximum de précision.

3.2. Méthode traditionnelle

Supposons que nous ayons comme objectif l'optimisation d'une machine à laver industrielle pour pièces mécaniques. La figure 1.5 schématise le principe de la machine à laver. Les paniers de pièces à nettoyer passent dans deux bains. Pour chaque bain, il est possible de faire varier le temps de trempage, de mettre des ultrasons, de faire tourner le panier, etc...

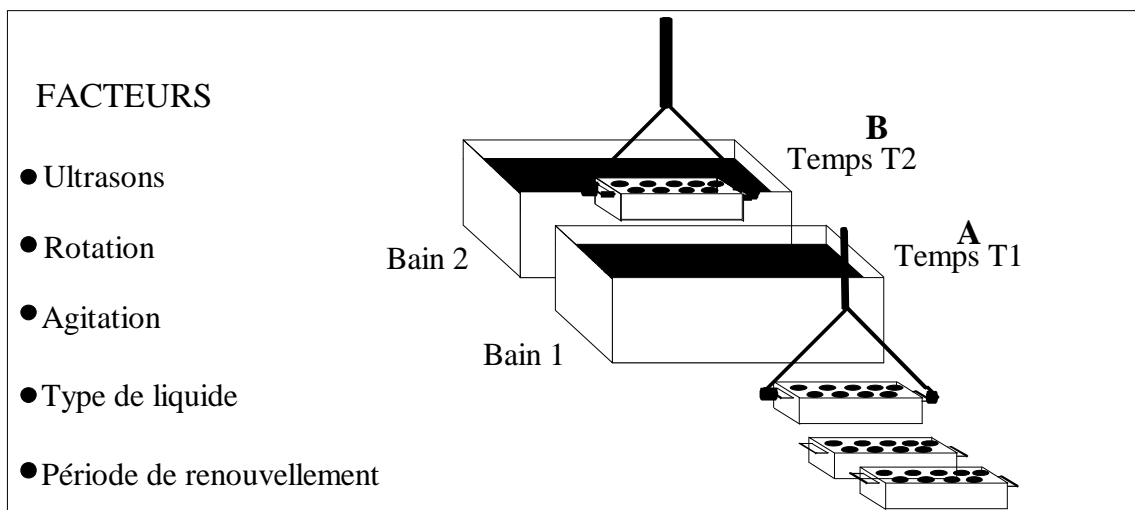


Figure 1.5 - Machine à laver

En simplifiant le problème à l'étude des deux facteurs temps T1 (facteur A) et temps T2 (facteur B), chacun de ces facteurs peut prendre plusieurs valeurs comprises entre un mini (A_{mini} , B_{mini}) et un maxi (A_{maxi} , B_{maxi}).

On souhaite étudier l'influence de chacune de ces grandeurs sur le système. La démarche traditionnelle employée de façon intuitive par les expérimentateurs consiste à étudier séparément les deux temps de trempage A et B.

On fixe B à un niveau moyen et on étudie la "réponse" (propreté obtenue) du système lorsque A varie de A_{mini} à A_{maxi} à l'aide de 4 expériences par exemple (voir figure 1.6).

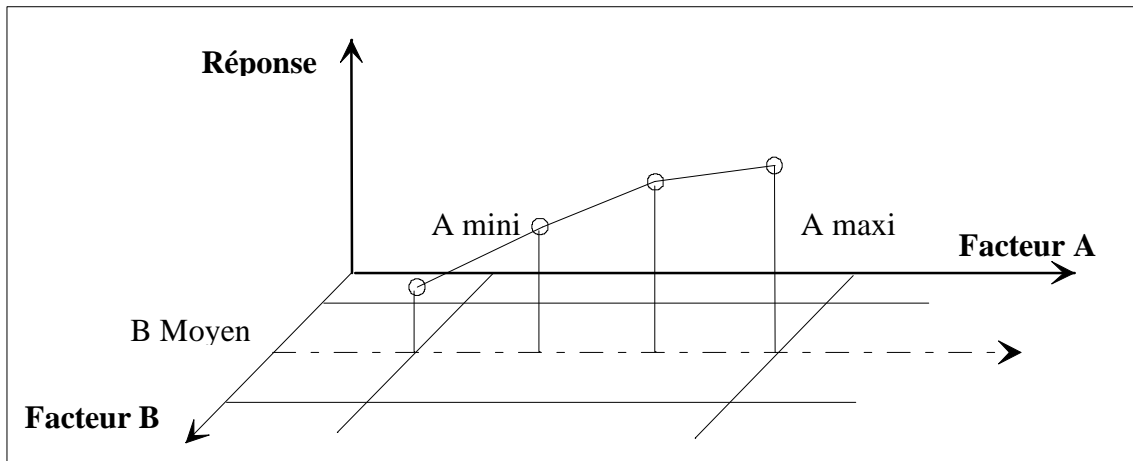


Figure 1.6 - Méthode traditionnelle d'expérimentation

On réalise la même expérience pour étudier l'influence de B. Au total, nous avons réalisé 8 essais. Le problème est de savoir si nous avons une bonne connaissance du système grâce à ces 8 essais.

Nous savons comment agit B lorsque A est au niveau moyen, mais connaissons-nous l'action de B lorsque A est au niveau $A_{\max i}$? et au niveau $A_{\min i}$?

De même, nous savons comment agit A lorsque B est au niveau moyen, mais connaissons-nous l'action de A lorsque B est au niveau $B_{\max i}$? et au niveau $B_{\min i}$?

Pour être capable de répondre de façon exhaustive à ces questions, il faut faire un maillage du domaine de validité des deux variables A et B et exécuter un test à chacun des nœuds du maillage (figure 1.7). Dans ce cas, il faut réaliser :

$$4 \times 4 = 4^2 = 16 \text{ expériences pour avoir la connaissance du système.}$$

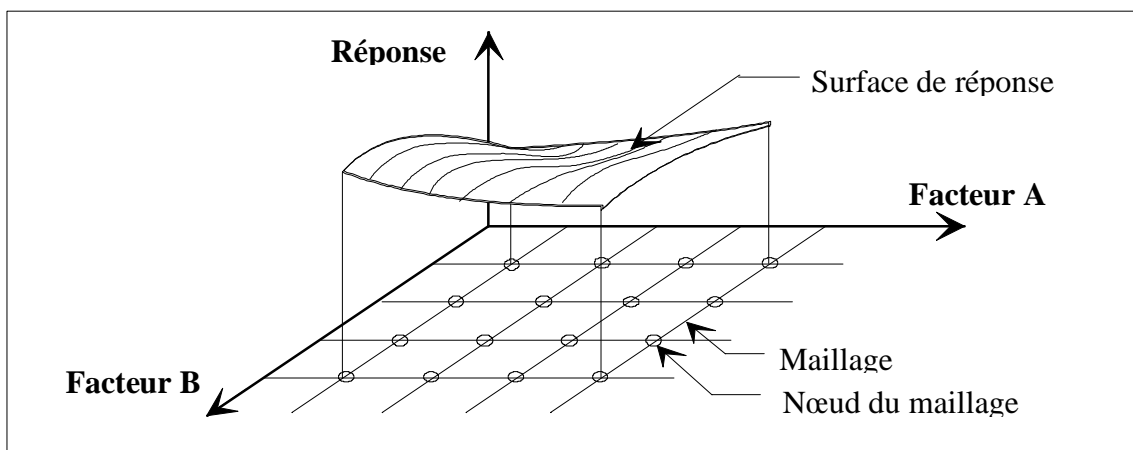


Figure 1.7 - Une expérience à chaque nœud du maillage

Mais nous avons étudié uniquement les facteurs A et B. Dans notre exemple, il y a encore de nombreux autres facteurs à étudier tels que les ultrasons, la rotation des pièces... Si nous généralisons au cas d'un système répondant à 7 facteurs influents, et si nous souhaitons réaliser 4 expériences par facteur, nous devons alors réaliser :

$$4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 4^7 = 16384 \text{ expériences !}$$

Cela risque de prendre du temps et de coûter assez cher. Même si nous souhaitons réaliser 2 points seulement par variable, il faudra quand même réaliser $2^7=128$ expériences, ce qui est déjà trop important.

Comme il est impossible de descendre au-dessous de 2 points par variable, l'expérimentateur se résout alors souvent à diminuer le nombre de variables étudiées, ce qui nécessairement conduit à laisser un doute sur les résultats obtenus. Finalement, la solution souvent retenue consiste à procéder par tâtonnements successifs en faisant varier un facteur à la fois. On modifie les ultrasons, puis la rotation, et ainsi de suite jusqu'à obtention d'une configuration satisfaisante. Cela prend en général beaucoup de temps, d'énergie et donne rarement des résultats satisfaisants.

3.3. La méthode des plans d'expériences

Pour résoudre ce problème, il ne faut plus raisonner par tâtonnement. Il faut adopter une démarche rigoureuse dans l'établissement et la conduite des essais. La méthode des plans d'expériences apporte cette démarche. Cette méthode consiste à établir un plan d'expérimentation comportant le minimum d'expériences compte tenu des résultats souhaités tout en apportant le maximum de précision dans les résultats. La méthode des plans d'expériences nous permettra, par exemple, de connaître l'influence de 7 variables avec 2 points par variable, dans un cas où il n'y a pas d'interaction significative entre les facteurs, à partir de 8 ou 12 essais.

Le principe de la méthode consiste à ne pas étudier tous les points du maillage, mais seulement certains points choisis pour leur particularité d'orthogonalité que nous détaillerons dans cet ouvrage. Ainsi dans le cas de l'exemple de la machine à laver, nous pourrions avoir une bonne connaissance du système avec seulement 16 essais. Ce plan d'expériences nous permettra non seulement de connaître l'influence des facteurs, mais également les interactions éventuelles entre certains facteurs. Il permettra une interprétation rapide et sans équivoque des résultats des essais en fournissant un modèle expérimental du système étudié.

Dans un plan d'expériences, plusieurs facteurs sont modifiés d'une expérience à l'autre selon une règle précise. Aussi, contrairement à ce que l'on pense habituellement, cette particularité permet d'obtenir la meilleure précision possible dans les résultats comme nous le montrerons dans les chapitres suivants.

3.4. Principaux avantages des plans d'expériences

Pour conclure cette introduction nous pouvons résumer les principaux avantages de cette méthode par rapport aux méthodes traditionnelles d'expérimentation :

- diminution du nombre d'essais ;
- possibilité d'étudier un très grand nombre de facteurs ;
- détection des éventuelles interactions entre facteurs ;
- modélisation très aisée des résultats ;
- détermination des résultats avec une bonne précision.

3.5. Définitions

Avant d'aller plus loin, il est important de bien définir le vocabulaire que nous allons employer.

Facteur : un facteur est une variable, ou un état, qui agit sur le système étudié. Un facteur peut être de type continu (température, mesure d'une longueur) ou discret (marque de l'outil, robinet ouvert ou fermé).

Réponse : la réponse du système est la grandeur que l'on mesure pour connaître l'effet des facteurs sur le système. La réponse peut être de type quantitatif (poids d'une pièce, dispersion sur 30 pièces...) ou qualitatif (impression de chaud et froid, présence ou non de coulure). Les réponses quantitatives sont en général plus faciles à traiter.

Facteur significatif : un facteur significatif est un facteur qui, lorsqu'il est modifié, modifie la réponse du système. Evidemment, un facteur non significatif sera un facteur qui n'a aucun effet sur la réponse du système ou, dont l'effet est trop faible pour pouvoir être apprécié.

Niveaux d'un facteur : les niveaux d'un facteur indiquent les valeurs que prend ce facteur au cours des essais. Par exemple, si le facteur "Temps" a deux niveaux: 1 mn, 3 mn, il prendra au cours des essais, soit la valeur 1 mn, soit la valeur 3 mn.

Modalité d'un facteur : la modalité d'un facteur est l'état que peut prendre ce facteur au cours du plan d'expériences. Pour un facteur de type qualitatif (marque d'un produit par exemple) le nombre de modalités du facteur sera le nombre de marques étudiées dans le plan d'expériences. Par abus de langage, nous utiliserons "Niveau" à la place de modalité.

Chapitre 2

Plans factoriels complets

La réalisation d'un plan d'expériences peut être très simple ou très compliquée suivant le nombre de facteurs étudiés, et les hypothèses formulées. Dans ce chapitre, nous proposons au lecteur d'aborder la notion de plans d'expériences par les plans les plus simples, notamment les plans complets à deux et trois facteurs 2^2 et 2^3 . On trouve de très nombreux cas d'utilisation de ces petits plans d'expériences dans le monde industriel, et comme ils sont sans risque, nous en conseillons vivement l'utilisation pour débiter dans la mise en place de plans d'expériences. Nous poursuivrons dans la suite du chapitre par une généralisation des plans complets, et enfin, nous aborderons la modélisation des systèmes étudiés.

1. Plans complet

1.1. Que signifie plan complet

L'étude d'un plan complet consiste à étudier toutes les combinaisons possibles des facteurs pris en considération dans l'expérience. On note ce plan X^k ce qui signifie que cette expérimentation concerne un système comportant k facteurs à X niveaux. Le nombre d'expériences nécessaires pour l'ensemble des combinaisons est assez facile à calculer.

Pour 2 facteurs à 2 niveaux (2^2), le nombre de combinaisons possibles comporte : $2 \times 2 = 2^2 = 4$ configurations. Le plan complet utilise 4 expériences. De même, pour 3 facteurs à 4 niveaux (4^3), le plan complet comporte : $4 \times 4 \times 4 = 4^3 = 64$ expériences.

Dans le cas d'un plan comportant des niveaux différents, le calcul du nombre d'expériences du plan complet est similaire.

Exemple : pour 3 facteurs à 2 niveaux et 2 facteurs à 4 niveaux, le plan complet comporte $2^3 \times 4^2 = 128$ expériences.

1.2. Etude du fonctionnement d'un pistolet à peinture

1.2.1. Exposé du problème

Pour illustrer l'étude du plan 2^2 , nous allons prendre comme exemple le fonctionnement d'un pistolet à peinture. Ce pistolet est destiné à appliquer une couche de vernis sur des objets et nous mesurons la couleur obtenue après application. La quantité de vernis appliquée (et donc la couleur) dépend (*a priori*) de deux facteurs, qui sont :

- l'ouverture du pistolet (Facteur A) ;
- la pression (Facteur B).

On souhaite mesurer l'influence de ces deux facteurs. Nous supposons rechercher une couleur de vernis jaune d'or. Nous ne nous intéressons dans cet exemple qu'à la mesure du jaune indépendamment des autres couleurs. La couleur obtenue (réponse recherchée) sera mesurée par un chiffre qui va de 0 (noir) à 60 (jaune).

1.2.2. Domaine expérimental

Nous définissons le domaine de validité de l'expérience comme étant les limites raisonnables de variation des facteurs. En effet, peu importe le comportement des facteurs à l'extérieur de ce domaine, ce qui nous intéresse c'est le comportement des facteurs à l'intérieur. Le domaine de validité des facteurs est le suivant :

Facteurs	Mini	Maxi
A - Ouverture	1 cran	3 crans
B - Pression	1 bar	2 bars

Nous allons choisir les niveaux des facteurs pour couvrir le domaine de validité des facteurs. Ce domaine est représenté en hachuré sur la figure 2.1. On choisit les limites de ce domaine de telle sorte qu'il soit le plus large possible, tout en s'assurant que le fonctionnement du système sera relativement homogène dans ce domaine. Le choix de prendre deux niveaux d'étude pour chaque facteur sous-entend bien sûr que l'on suppose une linéarité ou au moins une monotonie de l'évolution de la réponse entre ces deux niveaux.

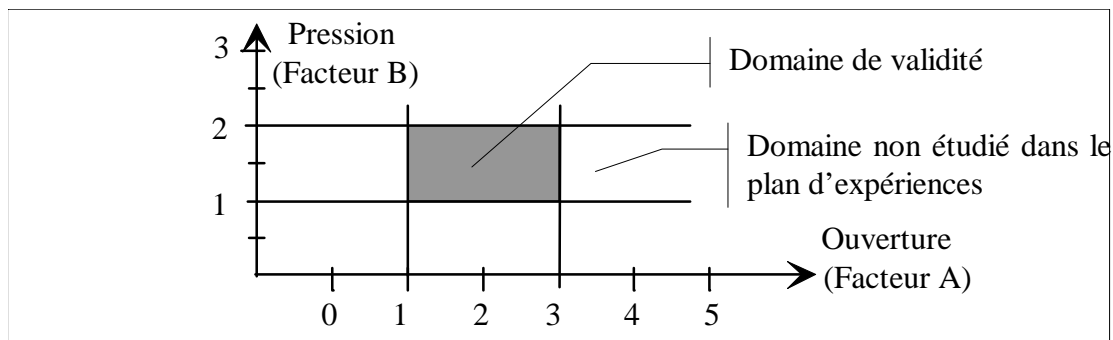


Figure 2.1 - Domaine expérimental

Les mini et maxi choisis (appelés niveaux 1 et 2) sont l'objet de compromis entre deux risques :

- si les niveaux sont trop proches l'un de l'autre, on risque de ne pas mettre en évidence l'effet des facteurs ;

- si les niveaux sont trop éloignés, l'hypothèse de linéarité est moins réaliste, et on risque, en plus, de tomber sur des combinaisons irréalisables.

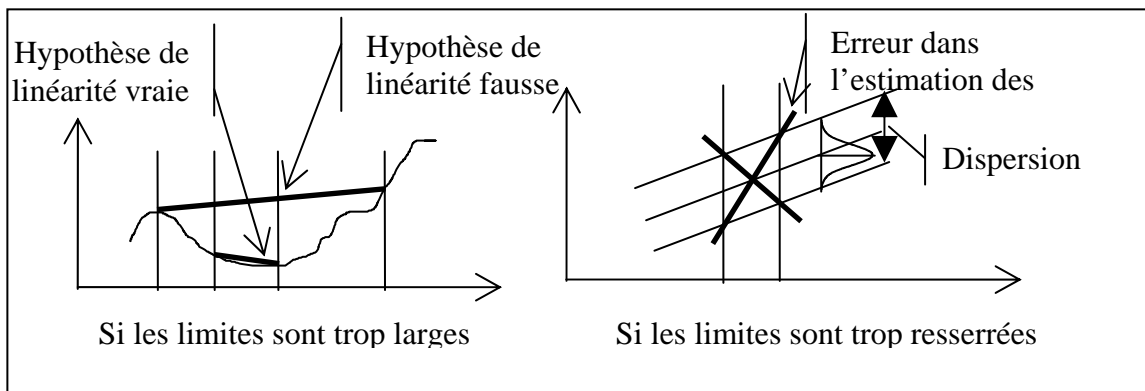


Figure 2.2 - Choix des niveaux des facteurs

1.3. Choix des expériences

Pour choisir les points d'expérience, deux stratégies peuvent être retenues (figure 2.3).

La stratégie n°1 (méthode traditionnelle) consiste à bloquer le facteur A au milieu de la plage de mesure. On réalise alors deux mesures $M1$ et $M2$ aux extrémités du domaine de B. On fait la même manipulation pour mesurer l'effet du facteur A avec les mesures $M3$ et $M4$.

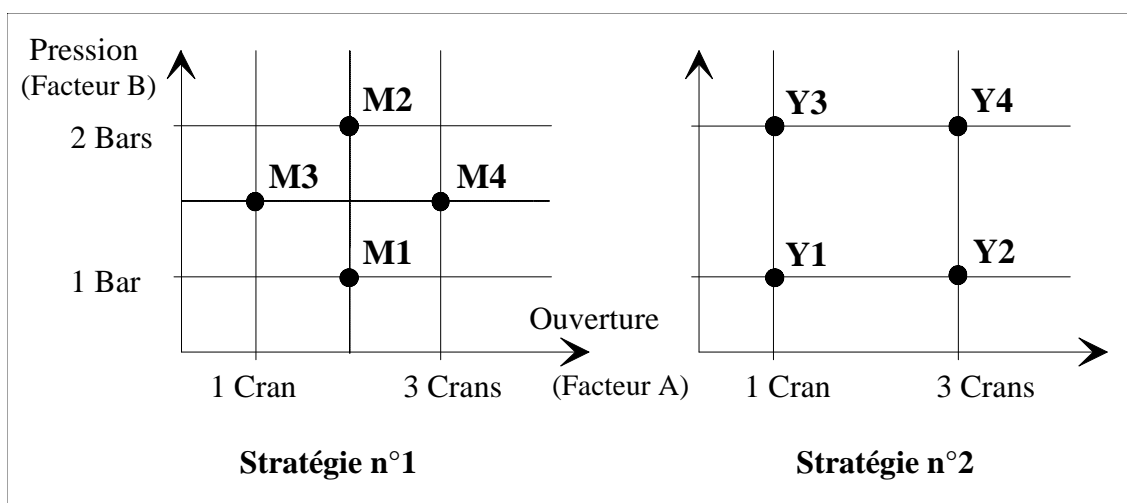


Figure 2.3 - Stratégies d'expérimentation

La stratégie n°2 (méthode des plans d'expériences) consiste à prendre les points de mesure aux extrémités du domaine expérimental ($Y1$, $Y2$, $Y3$, $Y4$ sur la figure 2.3). Ces points correspondent aux nœuds du maillage du domaine expérimental.

1.3.1. Première différence, la précision sur le calcul de l'effet

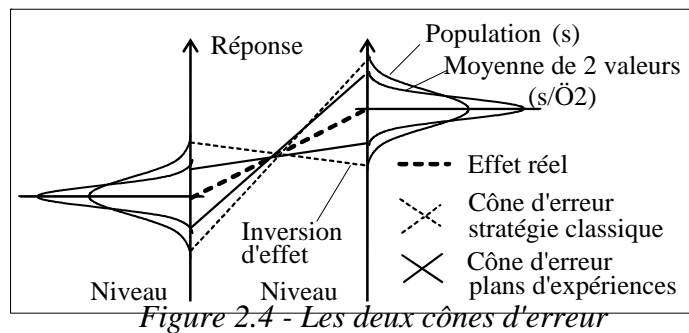
Dans la stratégie n° 1, l'effet de B sur le système sera mesuré à l'aide des mesures $M1$ et $M2$. On remarque que les expériences $M3$ et $M4$ ne sont pas utilisées pour estimer l'effet du facteur B.

L'effet de A sur le système sera mesuré à l'aide des mesures $M3$ et $M4$. On remarque que les expériences $M1$ et $M2$ ne sont pas utilisées pour estimer l'effet du facteur A .

Dans la stratégie n°2, l'effet de A sera mesuré à l'aide des mesures $Y1$, $Y2$, $Y3$ et $Y4$. En effet, celui-ci sera la différence entre la **moyenne** $(Y2 + Y4)/2$ et la **moyenne** $(Y1 + Y3)/2$. De même, l'effet de B sera mesuré à l'aide des mesures $Y1$, $Y2$, $Y3$ et $Y4$.

On remarque dans la seconde stratégie que tous les points de mesure sont utilisés pour estimer l'effet du facteur A et l'effet du facteur B . On montre que la précision obtenue par la stratégie numéro 2 (**comparaison de deux moyennes**) est alors bien supérieure à la stratégie numéro 1 (**comparaison de deux valeurs**).

En effet, la théorie de l'échantillonnage nous dit que lorsqu'une population est distribuée selon une loi d'écart-type σ la moyenne d'un échantillon de n valeurs est distribuée selon une loi d'écart-type σ/\sqrt{n} .



La figure 2.4 illustre le gain en précision entre la stratégie classique et la stratégie des plans d'expériences.

- Dans le premier cas, on ne raisonne que sur des valeurs individuelles, le cône d'erreur est important. Il peut même conduire à une inversion dans le sens des effets. Dans l'exemple de la figure 2.4, on peut conclure à tort que le niveau 2 donne une réponse plus faible que le niveau 1.
- Dans le second cas, l'effet de la moyenne diminue le cône d'erreur. La moyenne de deux valeurs a un écart-type plus faible que la distribution des valeurs individuelles. Dans le cas de la figure 2.4, on supprime alors le risque d'inverser le sens des effets.

On peut démontrer, que, compte tenu d'un nombre d'essais donné, la méthode des plans d'expériences est la méthode la plus précise, et qu'on ne peut pas faire plus précis pour un nombre d'essais constant.

1.3.2. Seconde différence, l'étude des interactions

Qu'appelle-t-on interaction?

Les interactions, lorsqu'elles sont présentes dans un système, sont sans doute les phénomènes les plus difficiles à interpréter en l'absence de méthode. Pour illustrer cette notion, nous nous appuyerons sur la figure 2.5.

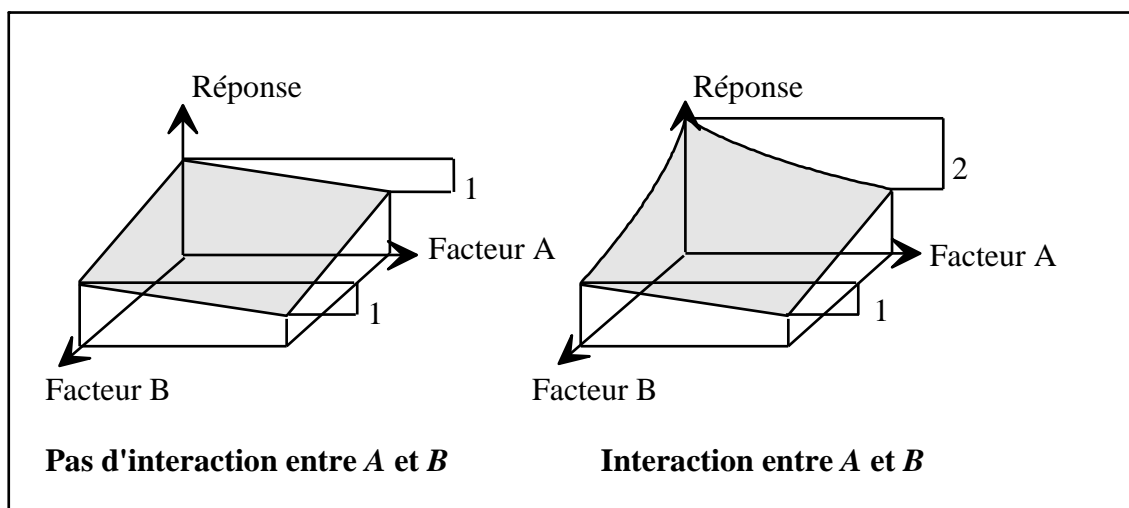


Figure 2.5 - Notion d'interaction

Le premier schéma montre un phénomène sans interaction. On constate que l'effet sur la réponse lorsque le facteur A passe du niveau 1 au niveau 2 est de -1, et **ceci, indépendamment de l'état du facteur B.**

Le deuxième schéma montre un phénomène avec interaction. Dans ce cas, l'effet du facteur A sur la réponse n'est pas le même selon que le facteur B est au niveau 1 ou au niveau 2. En effet, lorsque A passe de 1 à 2 alors que B est à 1, la variation de la réponse est de -2. Par contre, la même variation de A alors que B est au niveau 2 ne provoque qu'une variation de réponse de -1. **Il y a interaction entre les facteurs A et B.**

On constate que la présence d'une interaction apparaît comme étant une distorsion de la surface de réponse. Cette distorsion étant d'autant plus importante que l'interaction est grande. On peut illustrer la notion d'interaction par un exemple pratique tiré de la vie courante. Supposons que nous étudions le débit à la sortie d'un robinet d'eau. Les facteurs retenus sont :

- la pression du réseau ;
- l'ouverture du robinet.

Si nous observons la différence de débit en passant l'ouverture du robinet de $\frac{1}{4}$ de tour à $\frac{1}{2}$ tour, il est évident qu'elle dépend directement de la pression du réseau. Il y a donc interaction entre l'ouverture et la pression.

Quelle stratégie pour étudier les interactions ?

Si nous retenons la stratégie numéro 1 (figure 2.3) pour l'étude des facteurs A et B, nous constatons qu'il n'est pas possible de visualiser une interaction, seule la stratégie numéro 2 permet cette étude. Il est évidemment impossible d'identifier une interaction si nous faisons varier un facteur à la fois.

1.3.3. Conclusion

La stratégie numéro 1 est celle qui est souvent retenue pour une approche par tâtonnement. Cependant, elle est loin d'être la stratégie optimale. La stratégie n°2 (celle des plans d'expériences) est de bien meilleure qualité, ceci pour plusieurs raisons.

1. On sera capable dans cette stratégie de mesurer l'interaction entre les facteurs A et B, ce qui est impossible avec la stratégie n°1.

2. Les effets des facteurs sont calculés à partir de 4 mesures au lieu de 2 mesures. La précision des calculs, à dispersion égale, est donc meilleure.

Ces deux avantages (précision et étude des interactions) font que nous retiendrons cette stratégie pour étudier un système.

1.4. Matrice d'expériences

Nous allons définir une notation appelée notation de Yates du nom de son auteur. On symbolise par :

- -1 le niveau bas de chaque facteur ;
- +1 le niveau haut de chaque facteur.

Ainsi lorsque la pression sera à 1 bar, nous dirons que la pression est au niveau -1, de même lorsque la pression sera à 3 bars, nous dirons que la pression est au niveau +1.

La matrice d'expériences définit les conditions des essais. Si nous choisissons la stratégie n°2 définie au paragraphe 1.3, cette matrice s'écrit :

Pt	N° de l'essai	Ouverture (facteur A)	Pression (facteur B)	Couleur (réponse)
Y1	1	-1	- 1	15
Y2	2	+1	- 1	20
Y3	3	-1	+1	25
Y4	4	+1	+1	30
Niveau -		1 cran	1 bar	
Niveau +		3 crans	2 bars	

1.5. Résultats de l'étude

L'étude consiste à réaliser les quatre essais programmés dans la matrice d'expériences. Pour chaque essai, les facteurs sont fixés à +1 ou à -1. La réponse est obtenue en mesurant la couleur obtenue sur les pièces lors de l'essai.

Bien sûr, les résultats obtenus sont limpides car le nombre de facteurs est faible. Il n'en est pas toujours de même dans les essais industriels. Pour formaliser le calcul, nous établirons un tableau des moyennes.

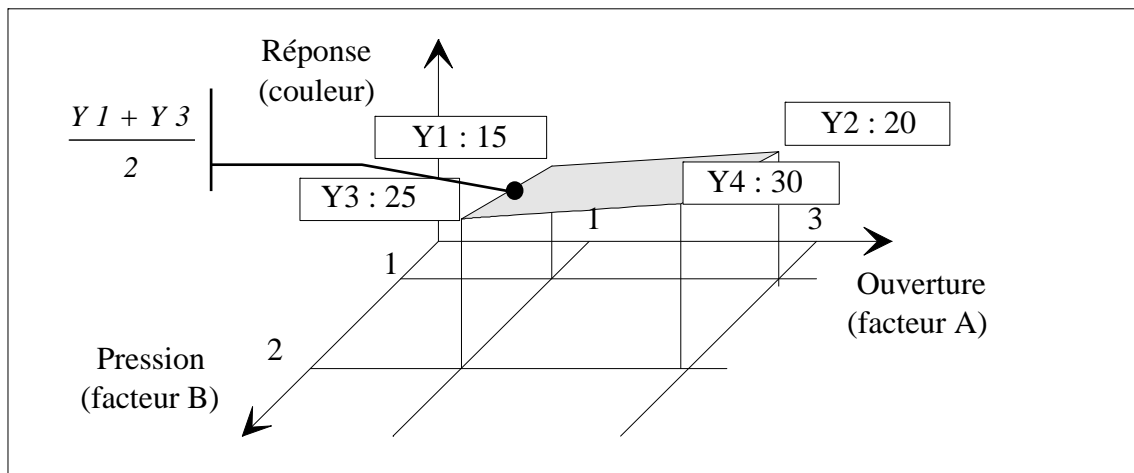


Figure 2.6 - Résultat des expériences

	A	B
Niveau -1	20	17,5
Niveau +1	25	27,5

Moyenne des réponses
lorsque B = -1

La figure 2.6 nous montre que si la pression passe de 1 à 2 bars, la couleur du vernis déposé augmente de 10 points. De même, lorsque l'ouverture passe de 1 à 3 crans, la couleur gagne 5 points.

Nous écrirons ces résultats en disant :

- l'effet global de l'ouverture est de +5 ;
- l'effet global de la pression est de +10.

Définition de l'effet moyen : l'effet moyen est défini comme étant la moitié de l'effet global.

C'est, dans le cas de la pression, l'augmentation de la couleur lorsqu'on passe de la pression moyenne à la pression maxi (effet moyen = +5).

1.6. Calcul des effets avec la notation de YATES

1.6.1. Calcul des effets

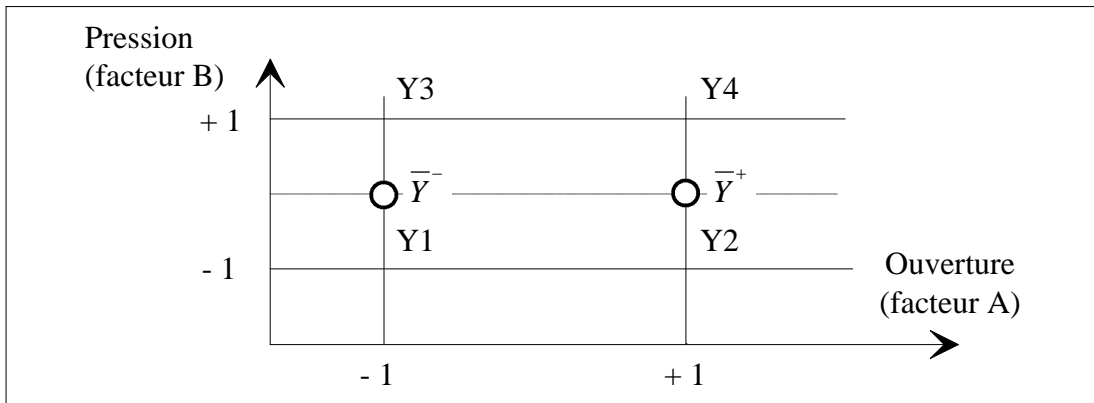


Figure 2.7 - Calcul des effets moyens

Notations utilisées dans la figure 2.7 :

- \bar{Y}_+ Moyenne des réponses lorsque l'ouverture est au niveau haut ;
- \bar{Y}_- Moyenne des réponses lorsque l'ouverture est au niveau bas ;
- M Moyenne générale des 4 essais.

Nous calculons aisément :

$$\bar{Y}_+ = \frac{1}{2} (Y_2 + Y_4) \quad \text{et} \quad \bar{Y}_- = \frac{1}{2} (Y_1 + Y_3)$$

L'effet moyen de l'ouverture (E_O) est donc de :

$$E_O = \frac{1}{2} [\frac{1}{2} (Y_2 + Y_4) - \frac{1}{2} (Y_1 + Y_3)] = \frac{1}{4} [-Y_1 + Y_2 - Y_3 + Y_4]$$

On calculerait de même l'effet de la pression :

$$E_P = \frac{1}{4} [-Y_1 - Y_2 + Y_3 + Y_4]$$

Application numérique : En remplaçant $Y_1..Y_4$ par leurs valeurs,

$$E_O = \frac{1}{4} [-15 + 20 - 25 + 30] = 2,5$$

$$E_P = \frac{1}{4} [-15 - 20 + 25 + 30] = 5$$

nous retrouvons bien les résultats évidents dans un cas aussi simple.

1.6.2. Calcul des résultats à partir de la matrice d'expériences

L'originalité de la notation de Yates pour la matrice d'expériences est qu'elle permet de retrouver directement les formules générales des effets moyens. En effet, la matrice d'expériences est la suivante:

Point	N° de l'essai	Ouverture (facteur A)	Pression (facteur B)	Couleur (réponse)
Y1	1	-1	- 1	15
Y2	2	+1	- 1	20
Y3	3	-1	+1	25
Y4	4	+1	+1	30

Si nous reprenons la formule de l'effet moyen de l'ouverture, nous avons :

$$E_O = 1/4 [-Y1 + Y2 - Y3 + Y4]$$

On peut remarquer que les signes affectant les $Y1..Y4$ dans l'équation précédente sont les mêmes que ceux de la colonne "Ouverture".

De même, pour la pression $E_P = 1/4 [-Y1 - Y2 + Y3 + Y4]$, les signes affectant les $Y1..Y4$ sont les signes de la colonne "Pression".

Conclusion : lorsqu'on utilise la notation de Yates, les effets moyens des facteurs se calculent de la façon suivante : on somme les réponses de tous les essais, affectées du signe du facteur correspondant à chaque essai. Le total est divisé par le nombre d'essais.

Cette notation est donc très pratique mais, elle est malheureusement difficile à généraliser simplement dans les cas où les facteurs étudiés ont plus de deux niveaux. Il est donc nécessaire d'introduire une autre méthode de calcul des effets moyens.

1.7. Méthode générale de calcul des effets

Afin d'avoir une notation plus facilement généralisable aux cas des facteurs à plus de deux niveaux, notamment dans le cas des facteurs qualitatifs, nous allons abandonner la notation de Yates (-1 et +1). Nous noterons 1 le niveau le plus faible, 2 le niveau le plus élevé. La figure 2.8 nous donne les conditions d'essais avec cette notation.

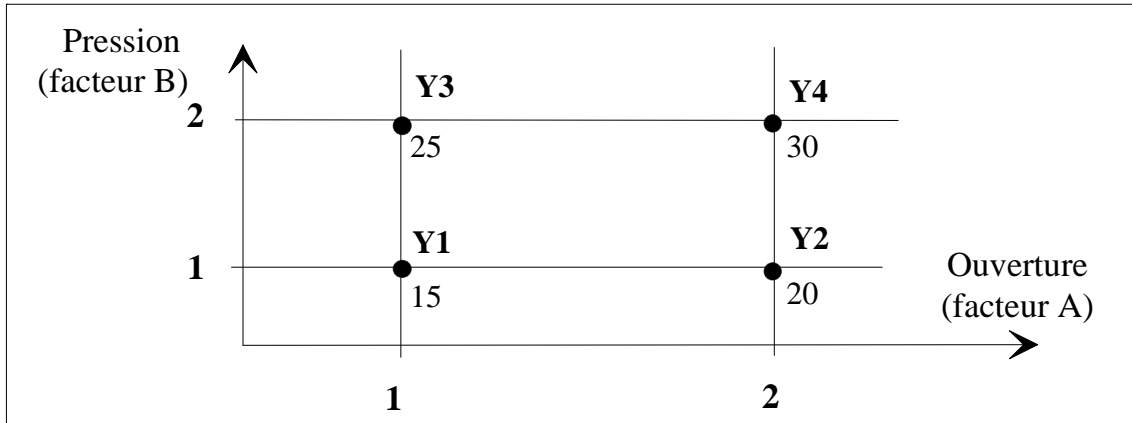


Figure 2.8 - Notations 1 et 2 pour les niveaux

	A	B
Niveau 1	$\frac{15 + 25}{2} = 20$	$\frac{15 + 20}{2} = 17,5$
Niveau 2	$\frac{20 + 30}{2} = 25$	$\frac{25 + 30}{2} = 27,5$

La moyenne générale des essais correspond au point central du domaine de validité. Nous pouvons donc calculer l'effet moyen de l'ouverture en établissant le tableau des moyennes. On calcule les effets des facteurs en effectuant :

$$E_{O(\text{niveau } 2)} = (\text{moyenne des réponses lorsque l'ouverture} = 2) - \text{moyenne générale des réponses}$$

De même pour la pression nous aurons :

$$E_{P(\text{niveau } 2)} = (\text{moyenne des réponses lorsque la pression} = 2) - \text{moyenne générale des réponses}$$

Application numérique

Moyenne générale

$$M = \frac{1}{4}(Y1 + Y2 + Y3 + Y4) = \frac{1}{4}(15 + 20 + 25 + 30) = 22,5$$

$$\text{Effet de l'ouverture au niveau 2 : } E_{O2} = \frac{1}{2}(Y2 + Y4) - M = 25 - 22,5 = 2,5$$

$$\text{Effet de la pression au niveau 2 : } E_{P2} = \frac{1}{2}(Y3 + Y4) - M = 27,5 - 22,5 = 5$$

Nous verrons par la suite que ces résultats sont facilement généralisables quel que soit le plan d'expériences.

Effet de A au niveau i :

E_{Ai} = Moyenne des réponses lorsque A est au niveau i - Moyenne générale.

On constate facilement que si $E_{O2} = 2,5$ on a alors $E_{O1} = - 2,5$. Il est donc inutile de calculer les deux effets moyens d'un facteur, car si on connaît l'effet du facteur O au niveau 1 (E_{O1}), on peut déduire E_{O2} par la relation :

$$E_{O1} + E_{O2} = 0$$

Degré de liberté d'un facteur à deux niveaux :

Le calcul des effets moyens d'un facteur à deux niveaux ne possède qu'un seul degré de liberté (une seule valeur indépendante, la seconde se déduit de la première).

Représentation graphique des effets

Afin de comparer les effets des différents facteurs, nous représenterons ces effets sur un graphique que nous noterons : graphique des effets moyens. Ce graphique est immédiat à partir du tableau des moyennes (figure 2.9).

	A	B
Niveau 1	20	17,5
Niveau 2	25	27,5

Le point $P1$ sur le graphe des effets est égal à la moyenne des réponses lorsque l'ouverture est à 1. Ce graphique permet de visualiser de façon simple la différence entre l'effet de la pression et l'effet de l'ouverture.

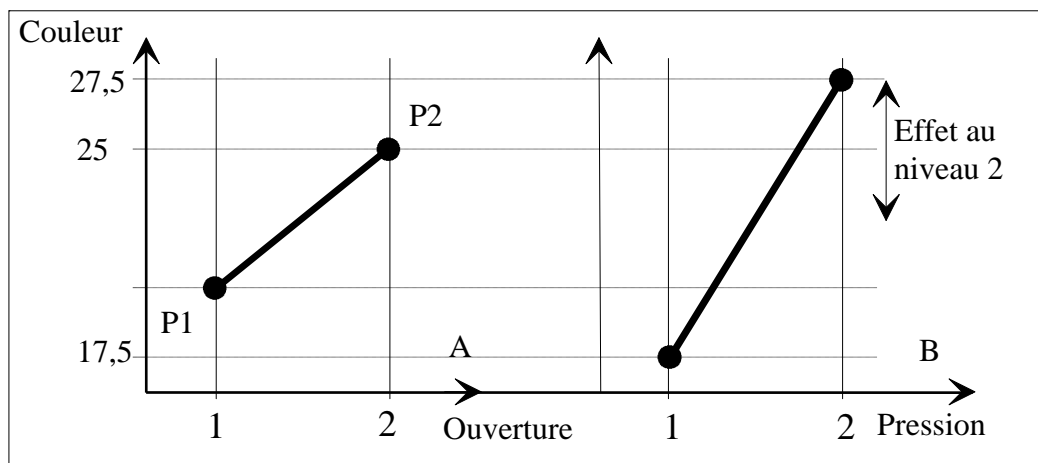


Figure 2.9 - Tableau des moyennes et graphique des effets moyens

1.8. Etude de l'installation de vernissage avec interaction

Pour introduire la notion d'interaction, nous allons reprendre l'exemple précédent, mais cette fois-ci en introduisant une interaction. Rappelons les facteurs étudiés :

Facteur A	Ouverture	2 niveaux (1 cran et 3 crans)
Facteur B	Pression	2 niveaux (1 bar et 2 bars)

La réponse du système est toujours la couleur obtenue après pistolage sur les produits. Comme nous avons 2 facteurs à 2 niveaux, le plan complet comporte $2^2 = 4$ essais. Il est le suivant :

Essais	A	B	Y
1	1	1	15
2	2	1	20
3	1	2	25
4	2	2	40

La moyenne générale est égale à $(15 + 20 + 25 + 40)/4 = 25$

Si nous représentons sur un graphique les réponses du système, nous avons:

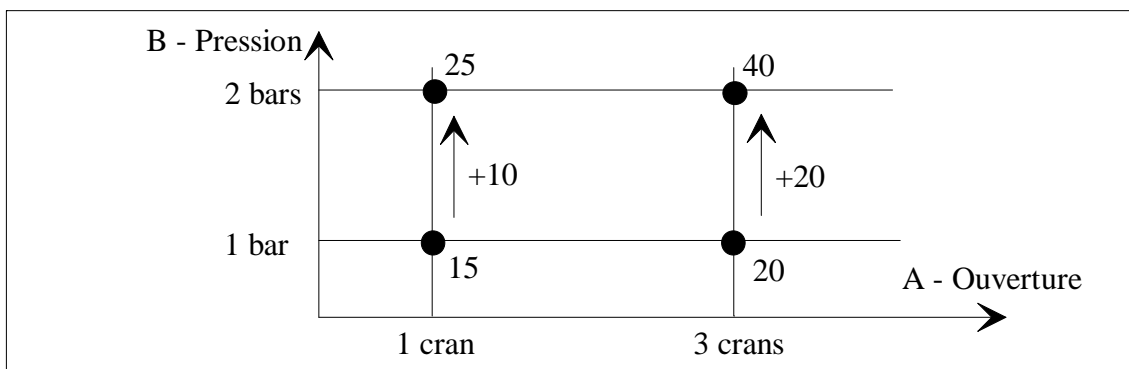


Figure 2.10 - Couleur obtenue en fonction des facteurs

Si nous calculons l'effet global de la pression lorsque l'ouverture est au niveau 1, nous trouvons :

$$\text{Effet de la pression} = 25 - 15 = 10$$

Si nous calculons l'effet global de la pression lorsque l'ouverture est au niveau 2, nous trouvons :

$$\text{Effet de la pression} = 40 - 20 = 20$$

Nous constatons que la présence d'une ouverture importante augmente l'effet de la pression. Il y a donc **interaction** entre l'ouverture et la pression.

Calcul des effets moyens

Pour calculer les effets moyens dans le cas d'un système avec interaction, nous reprenons simplement la formule générale de calcul des effets moyens (définie au paragraphe 1.7.).

Tableau des moyennes

M = 25	A	B
Niveau 1	20	17,5
Niveau 2	30	32,5

Moyenne des essais
lorsque A = 1

$E_{A1} = 20 - 25 = -5$
 $E_{B1} = 17,5 - 25 = -7,5$

on en déduit $E_{A2} = +5$
 on en déduit $E_{B2} = +7,5$

Calcul de l'interaction I_{A1B1}

Calculer l'interaction consiste à calculer la modification apportée à la réponse (ici la couleur) du fait de la configuration particulière des deux facteurs A et B. L'interaction I_{A1B1} est l'interaction qui existe lorsque A est au niveau 1 et B au niveau 1. Cette interaction est l'une des 4 interactions possibles résultant des configurations suivantes :

		B	
		1	2
A	1	I_{A1B1}	I_{A1B2}
	2	I_{A2B1}	I_{A2B2}

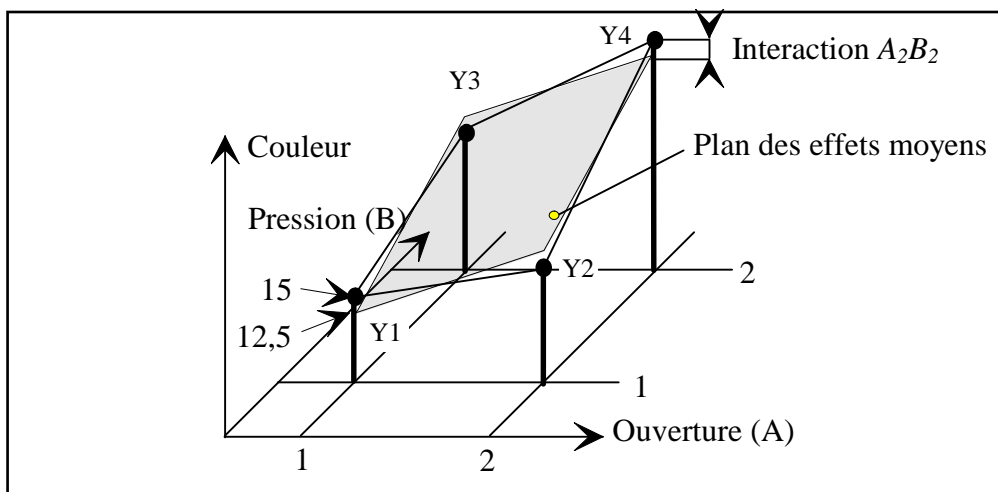


Figure 2.11 - Plan des effets moyens et interaction

Lors de l'essai 1, le facteur A était au niveau 1 et le facteur B au niveau 1. S'il n'y avait que des effets du premier ordre (sans interaction). La surface de réponse serait un plan (voir figure 2.11) et on aurait pour réponse :

$$Y_{\sim} = M + E_{A1} + E_{B1} = 25 - 5 - 7,5 = 12,5$$

Or, la réponse obtenue dans le plan d'expériences est une couleur de 15. L'écart entre la réponse théorique et le résultat de l'essai est dû à l'interaction entre les deux facteurs A et B. L'interaction I_{A1B1} est donc égale à :

$$I_{A1B1} = Y1 - M - E_{A1} - E_{B1} = + 2,5$$

On constate donc que l'interaction, lorsque le facteur A est à 1 et le facteur B à 1, est égale à la réponse du système dans cette configuration moins la moyenne générale, moins la somme des effets de premier ordre.

Calcul des autres interactions

En appliquant le même raisonnement que précédemment nous pouvons écrire :

$$I_{A_2B_1} = Y_2 - M - E_{A_2} - E_{B_1} = -2,5$$

$$I_{A_1B_2} = Y_3 - M - E_{A_1} - E_{B_2} = -2,5$$

$$I_{A_2B_2} = Y_4 - M - E_{A_2} - E_{B_2} = +2,5$$

Nous trouvons donc :

		B	
		1	2
A	1	$I_{A_1B_1} = 2,5$	$I_{A_1B_2} = -2,5$
	2	$I_{A_2B_1} = -2,5$	$I_{A_2B_2} = 2,5$

On remarque que la somme des lignes est égale à zéro et que la somme des colonnes est égale à zéro. Il suffit de trouver une interaction pour déduire les autres. Le nombre de degré de liberté de cette interaction AB est donc de 1. On peut montrer que le nombre de degrés de liberté d'une interaction est égal au produit des degrés de liberté de chacun des deux facteurs.

Ici $ddl(A) = 1$, $ddl(B) = 1$ d'où $ddl(AB) = 1 \times 1 = 1$

1.9. Formule générale de calcul des interactions

L'interaction $I_{A_iB_j}$ sera recherchée à partir des résultats moyens des essais réalisés lorsque le facteur A se trouve au niveau i et le facteur B au niveau j . Mais dans tous ces essais, l'effet principal E_{A_i} joue sur la réponse, de même que l'effet E_{B_j} . Si M est la moyenne générale des essais, nous pouvons donc écrire :

$$I_{A_iB_j} = \text{Moyenne des réponses lorsque } (A=i, B=j) - M - E_{A_i} - E_{B_j}$$

Nous appellerons par la suite **interaction d'ordre 2** celles intervenant entre deux facteurs (AB , $DE...$). De même, nous appellerons **interaction d'ordre 3** celles intervenant entre trois facteurs (ABC), etc.

1.10. Graphe de l'interaction

Comme pour les effets principaux, nous pouvons représenter les interactions sur un graphe afin de faciliter l'interprétation (figure 2.12).

Le point $P1$ est obtenu en faisant la moyenne des réponses lorsque $A=1$ et $B=1$. Ici, cela se résume à l'essai n°1. On ferait de même pour obtenir les points $P2$, $P3$ et $P4$. Sur la gauche, nous avons représenté le graphe des interactions sur un schéma en trois dimensions. Dans la pratique, nous le représenterons sur un schéma en deux dimensions.

Nous pouvons représenter deux graphes des interactions selon le plan ([couleur, facteur A] ou [couleur, facteur B]) sur lequel nous souhaitons projeter le schéma en trois dimensions. Les deux schémas de droite sur la figure 2.12 montrent ces deux projections.

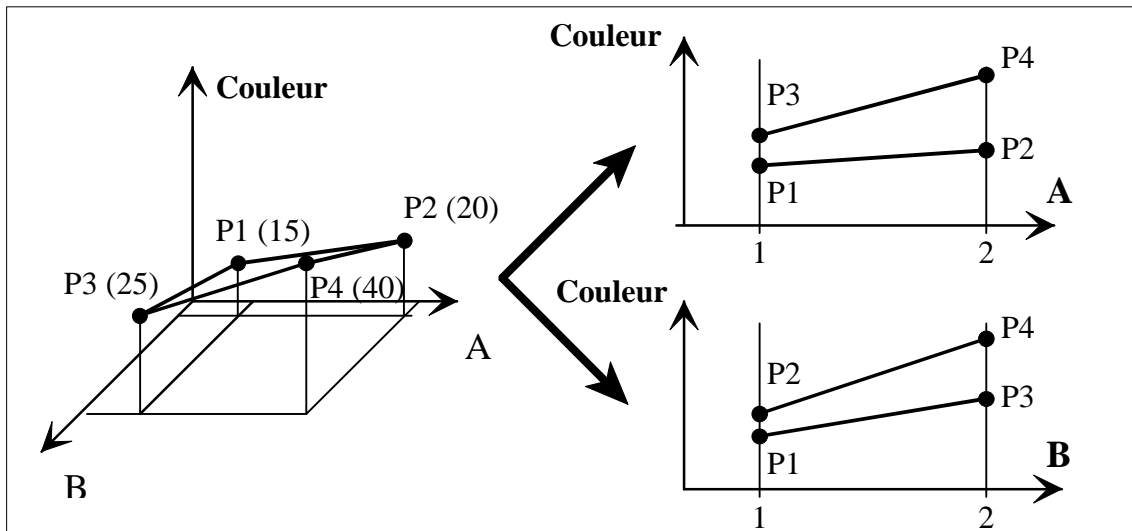


Figure 2.12 - Graphe de l'interaction

La présence d'une interaction sur ce graphe se note lorsque les deux droites ne sont pas parallèles.

2. Plans complets 2³

Le paragraphe 1 nous a permis d'aborder l'étude complète des plans d'expériences les plus simples qui existent, soit l'étude de deux facteurs à deux niveaux. Nous allons aborder dans ce paragraphe, l'étude des plans d'expériences de trois facteurs à deux niveaux. Nous profiterons de ce paragraphe pour décrire de façon sommaire la démarche générale de mise en œuvre d'un plan d'expériences. Une description plus complète est réalisée dans le chapitre 8. Le déroulement d'un plan d'expériences suit les sept étapes suivantes :

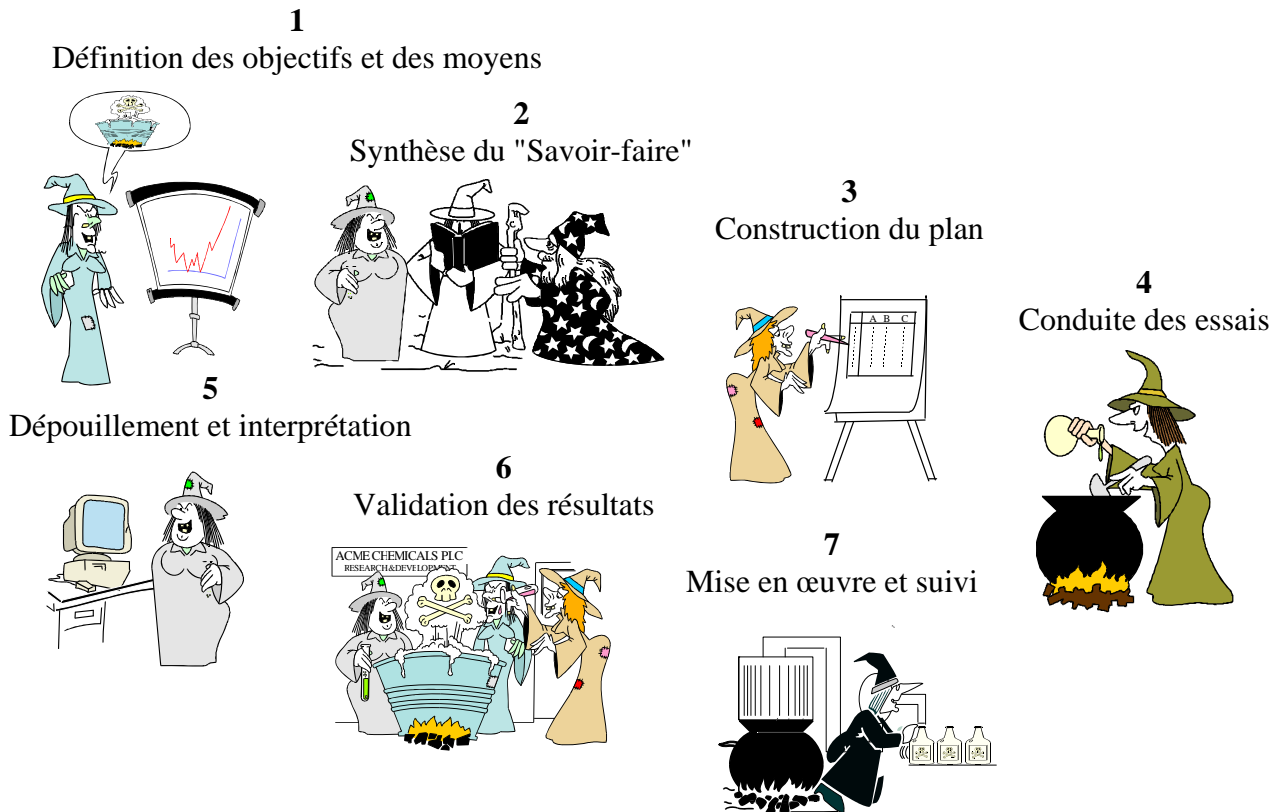


Figure 2.13 - Démarche de mise en œuvre des plans d'expériences

Pour illustrer ce paragraphe nous avons choisi un problème très simple que le lecteur peut facilement reproduire pour s'entraîner à l'utilisation de la méthode des plans d'expériences : l'étude d'un four à micro-ondes ménager.

2.1. Définition des objectifs et des moyens

La première étape dans le déroulement de la démarche consiste à définir parfaitement les objectifs de la méthode. Dans notre cas de figure, nous voulons :

- connaître l'influence des différents facteurs sur l'efficacité du chauffage d'un bol de lait ;
- minimiser la consommation d'énergie.

Cette étape permet également aux décideurs de mettre en place les moyens et le budget nécessaires à l'étude. Ces moyens sont assez limités dans le cas de notre étude.

2.2. Synthèse du "Savoir-faire"

C'est de loin l'étape la plus importante dans la conduite d'un plan d'expériences. Cette étape consiste à faire le bilan des connaissances de l'entreprise sur le sujet afin de déterminer :

- la réponse qu'il convient d'optimiser ;
- les moyens de mesurer la réponse ;
- les facteurs qui potentiellement agissent sur le système ;
- les éventuelles interactions que l'on veut rechercher ;
- les niveaux choisis pour les facteurs.

La synthèse du savoir-faire donne l'occasion d'organiser un "déballage d'idées" (*brainstorming*) rassemblant toutes les personnes ayant une compétence sur le sujet.

A l'issue du déballage d'idées, les facteurs suivants ont été cités :

- A - puissance du four ;
- B - temps de chauffage ;
- C - position du bol dans le four ;
- D - type de matière du bol ;
- E - forme du bol (hauteur, diamètre) ;
- F - quantité de lait ;
-

Un vote pondéré permet de limiter l'étude aux trois premiers facteurs. En l'absence de connaissances suffisantes sur le système, on retient toutes les interactions de second ordre (AB, AC, BC).

Le choix du domaine d'étude est le suivant :

Facteur	Description	Niveau 1	Niveau 2
A	Puissance du four	Medium (3)	Fort (5)
B	Temps de chauffage	1'00	1'30''
C	Position sur le plateau	Bord	Centre

2.3. Construction du plan

L'étape de construction du plan est du ressort du spécialiste des plans d'expériences. En fonction de la stratégie d'optimisation retenue dans l'étape précédente, il déterminera le plan le plus adapté à la situation.

Dans notre exemple, le plan est très simple, on veut faire le plan complet 2^3 qui consiste à faire toutes les combinaisons possibles entre les trois facteurs soit un plan à huit essais (voir figure 2.14). Dans le cas général, l'établissement du plan d'expériences est un peu plus compliqué, surtout si l'on souhaite faire un "plan fractionnaire", c'est-à-dire ne pas réaliser tous les essais du plan complet. Nous détaillerons largement dans la suite de cet ouvrage la démarche à suivre pour construire de tels plans.

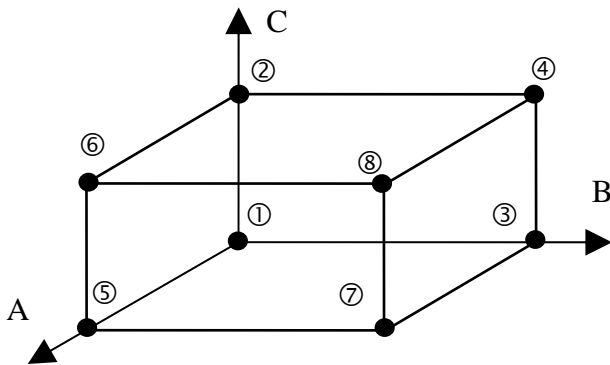
Compte tenu de la dispersion attendue dans la réponse (température du bol de lait), on choisit de répéter deux fois chaque essai. On réalisera donc seize essais en tout.

2.4. Conduite des essais

La conduite des essais est largement facilitée par une bonne préparation. Tous les éléments nécessaires seront rassemblés au départ, et chaque essai doit faire l'objet d'une fiche spéciale rassemblant :

- les éléments nécessaires ;
- la configuration des facteurs ;
- les résultats des mesures ;
- les conditions dans lesquelles se sont déroulés les essais.

Les essais ont donné les résultats suivants :



N°	A	B	C	Y1	Y2
1	1	1	1	43	45
2	1	1	2	45	49
3	1	2	1	54	54
4	1	2	2	57	55
5	2	1	1	60	56
6	2	1	2	61	59
7	2	2	1	78	82
8	2	2	2	81	81

Figure 2.14 - Résultats du plan d'expériences

2.5. Dépouillement et interprétation

Le dépouillement consiste à faire les calculs des effets, et à produire les graphes des effets. Cette étape est utilement réalisée avec un logiciel spécialisé ou avec un simple tableur dans le cas des plans simples comme celui que nous traitons.

L'interprétation est préparée par le spécialiste des plans d'expériences, mais se réalise en groupe. Elle consiste à s'enrichir des résultats du plan, et à interpréter le sens physique des effets mis en évidence.

Le dépouillement suit la démarche que nous avons exposée au paragraphe 1.

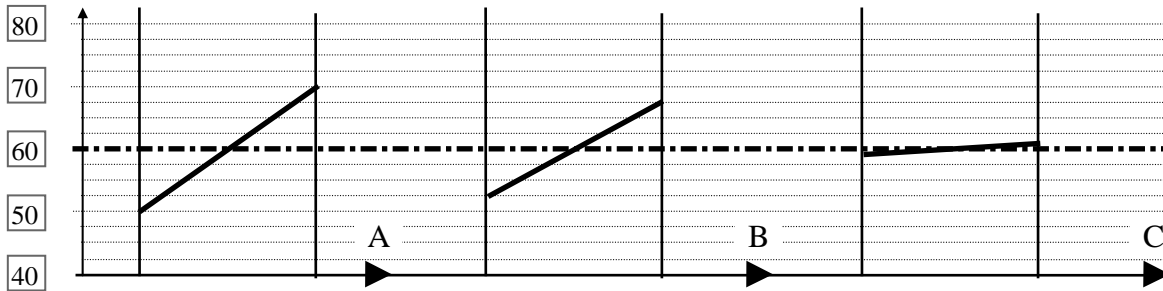
1. Tableau des moyennes

Moyenne générale des essais : 60

M = 60	A Puissance	B Temps	C Position
Niveau 1	50,25	52,25	59,00
Niveau 2	69,75	67,75	61,00

Moyenne des essais
lorsque A = 2

2. Graphe des effets



3. Tableau des moyennes pour les interactions AB et BC et AC

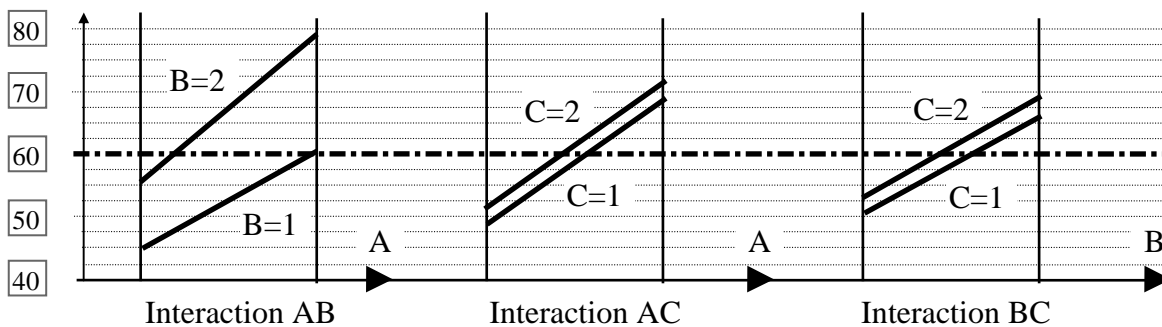
		B	
		1	2
A	1	45,5	55
	2	59	80,5

		C	
		1	2
A	1	49	51,5
	2	69	70,5

		C	
		1	2
B	1	51	53,5
	2	67	68,5

Moyenne des essais
lorsque A = 2 et C = 1

4. Graphes des interactions



On note sur les graphiques que seule l'interaction AB est significative (les droites ne sont pas parallèles).

5. Calcul des effets et des interactions

Pour le calcul des effets, on utilise la formule générale (paragraphe 1.7.).

$$\begin{aligned}
 E_{A1} &= 50,25 - 60 = -9,75 & \text{on en déduit } E_{A2} &= +9,75 \\
 E_{B1} &= 52,25 - 60 = -7,75 & \text{on en déduit } E_{B2} &= +7,75 \\
 E_{C1} &= 59,00 - 60 = -1,00 & \text{on en déduit } E_{C2} &= +1,00
 \end{aligned}$$

Seule l'interaction AB est significative. Pour le calcul des interactions, on utilise la formule générale (paragraphe 1.9.).

$$\begin{aligned}
 I_{A1B1} &= 45,5 - 60 - (-9,75) - (-7,75) = +3 \\
 \text{on en déduit } I_{A1B2} &= -3; & I_{A2B1} &= -3 & I_{A2B2} &= +3.
 \end{aligned}$$

6. Calcul de la réponse théorique

Pour chaque essai, il est possible de calculer une réponse théorique Y_{\sim} égale à l'addition de tous les effets et des interactions. Ainsi, pour l'essai n° 1, en ne retenant que les effets principaux et l'interaction AB, on calcule :

$$Y_{\sim 1} = 60 - 9,75 - 7,75 - 1 + 3 = 44,5$$

Moyenne générale $\left| \begin{array}{l} \text{Interaction } I_{A1B1} \\ \text{Effet } E_{C1} \end{array} \right.$

Effet E_{A1} $\left| \right.$

7. Calcul des résidus

Les réponses mesurées pour le premier essai étaient les suivantes :

N°	A	B	C	Y1	Y2
1	1	1	1	43	45

On définit les résidus comme étant la part de la réponse qui n'est pas expliquée par les effets mis en évidence. On calcule pour chaque essai, le résidu correspondant en établissant la différence entre la réponse mesurée et la réponse théorique.

Définition

Nous appellerons résidu la différence entre la réponse mesurée et la réponse théorique :

$$r = Y - Y_{\sim}$$

Nous pouvons calculer les réponses théoriques et les résidus pour l'ensemble des essais du plan factoriel. Pour le premier essai de la première ligne, nous aurions :

$$r = Y_{\sim 1} - Y_1 \text{ soit } 44,5 - 43 = 1,5$$

On peut vérifier que la somme des résidus est toujours égale à 0 aux erreurs d'arrondi près. Cette particularité est très utile pour vérifier si il n'y a pas d'erreur dans les calculs.

N°	A	B	C	Y_{\sim}	Y1	r	Y2	r
1	1	1	1	44,50	43	1,50	45	-0,50
2	1	1	2	46,50	45	1,50	49	-2,50
3	1	2	1	54,00	54	0,00	54	0,00
4	1	2	2	56,00	57	-1,00	55	1,00
5	2	1	1	58,00	60	-2,00	56	2,00
6	2	1	2	60,00	61	-1,00	59	1,00
7	2	2	1	79,50	78	1,50	82	-2,50
8	2	2	2	81,50	81	0,50	81	0,50

A ce stade de l'exposé, il faut expliquer les causes des écarts entre la réponse théorique et la réponse mesurée.

Première cause - variance naturelle du procédé

Tout procédé - quel qu'il soit - possède une variance naturelle. Dans le cas étudié, nous avons retenu 3 facteurs pour expliquer la réponse du système. Mais, il est bien évident que le procédé est sensible à un nombre beaucoup plus élevé de paramètres. Nous pouvons citer, à titre d'exemple, la température extérieure, l'hygrométrie, la précision de positionnement ...

Nous distinguerons à ce titre trois types de facteurs:

- **les facteurs étudiés** qui sont ceux que l'on modifiera pendant le plan d'expériences ;
- **les facteurs contrôlés** qui sont figés pendant le plan d'expériences comme le type de récipient ;
- **les facteurs non contrôlés** qui représentent l'ensemble des autres facteurs agissant sur le procédé. Ces facteurs sont à l'origine de la variance naturelle du procédé.

Les facteurs **non contrôlés** ont néanmoins une influence, que nous espérons faible, mais qui n'est pas nulle. De plus, ces facteurs non pris en compte sont nombreux, indépendants entre eux et, vérifient le théorème central limite. Ainsi, la réponse du système à une configuration figée des **facteurs contrôlés** n'est pas unique, mais répartie suivant une courbe de Gauss autour d'une valeur moyenne. C'est cette variabilité que nous appelons **variabilité naturelle**.

Deuxième cause - Variance d'ajustement

Nous avons calculé des effets moyens, mais les effets calculés sont-ils réellement les effets moyens? S'il existe une petite différence entre les effets calculés et les effets réels, cette différence se trouvera dans les résidus. Nous appelons cette variabilité, **variabilité d'ajustement**.

8. Interprétation

Sur les trois facteurs étudiés, seuls les facteurs A (puissance) et B (temps) sont significatifs. Le facteur position sur le plateau n'est pas (ou peu) significatif. Son effet est faible devant les résidus. L'interaction entre le facteur puissance et le facteur temps joue le rôle d'amplificateur, plus la puissance est importante, plus le temps modifie la température du liquide.

2.6. Validation des résultats

La validation des résultats consiste à vérifier si les hypothèses retenues au départ du plan d'expériences sont bien vérifiées. La validation consiste à réaliser un essai complémentaire **en dehors des essais du plan d'expériences** pour valider le modèle de comportement obtenu par le plan d'expériences.

Dans le cas d'un plan complet, tous les nœuds du maillage ont été testés. On a donc pu calculer toutes les interactions. Il reste cependant l'hypothèse de linéarité de la réponse à vérifier. Pour cela, on fait un essai au centre du domaine d'étude. Si la linéarité des facteurs est vérifiée, le résultat de cet essai sera égal à la moyenne des essais du plan d'expériences.

Dans notre exemple, un essai complémentaire a été réalisé au centre du domaine, on a trouvé :

N°	A Puissance	B Temps	C Position	Y
9	Medium/Fort (4)	1'15''	Médiane	63

qui est à rapprocher de la moyenne de 60 trouvée dans le plan d'expériences. On vérifie ainsi l'hypothèse de quasi-linéarité.

3. Cas général des plans complets

Nous allons généraliser l'étude que nous venons de faire pour les cas où il y a k facteurs.

Le plan complet représente le plan pour lequel toutes les combinaisons possibles d'arrangement auront été réalisées. C'est donc le nombre maximal d'essais que l'on peut réaliser.

Nous aurons à cœur par la suite de rechercher des plans pour lesquels le nombre d'essais nécessaires est plus faible que dans le cas du plan complet. Mais dans un premier temps, restons sur ce plan maximal.

3.1. Construction d'un plan complet

La construction d'un plan complet est très simple, il suffit de faire varier le premier facteur sur tous ces niveaux pendant que le second reste à un, et de recopier le bloc obtenu sur tous les niveaux du second facteur. On obtient ainsi un second bloc que l'on recopie sur tous les niveaux du troisième facteur et ainsi de suite (voir figures 2.15 et 2.16).

3.2. Premier exemple : 2 facteurs, 3 niveaux

Deux niveaux sont parfois insuffisants pour avoir une bonne idée du système. Il est alors utile de réaliser des expériences dans lesquelles les facteurs seront des facteurs à trois (ou plus) niveaux. Dans ce cas, nous pouvons également construire un plan complet. Pour illustrer ceci, nous allons étudier un problème d'amélioration de la capabilité sur une machine.

Les facteurs étudiés sont dans ce cas :

- facteur A - Type de plaquette (3 types testés) ;
- facteur B - Vitesse de coupe (3 vitesses testées).

La réponse du système est l'écart-type de la dispersion mesurée sur 30 pièces consécutives. L'écart-type est exprimé en $1/100^e$ de mm.

On cherche la configuration qui minimise la dispersion, cela revient à rechercher le niveau des facteurs qui ont un effet négatif.

Le plan complet comporte $3 \times 3 = 9$ essais. L'établissement du plan d'expériences est immédiat.

Essai	A	B	Y
1	1	1	2,4
2	1	2	1,9
3	1	3	1,3
4	2	1	2,9
5	2	2	2,2
6	2	3	1,7
7	3	1	4,1
8	3	2	3,3
9	3	3	2,9

| Bloc recopié

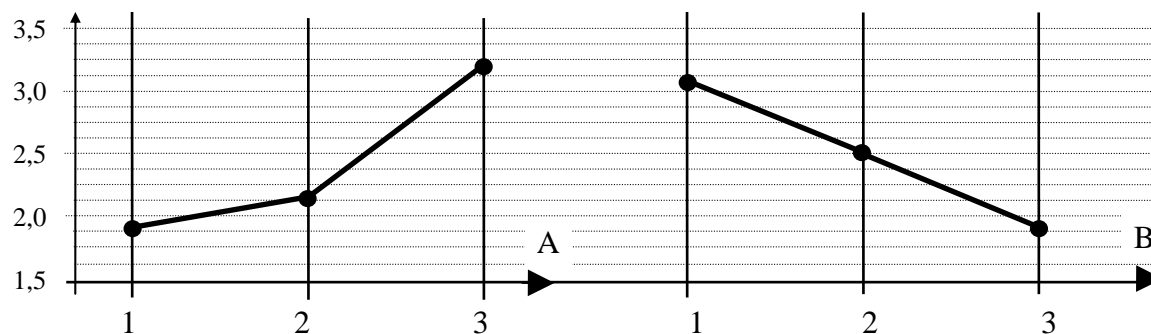
Figure 2.15 - Plan 3^2

3.2.1. Graphe des effets

Tableau des moyennes

M = 2,52	A	B
1	1,87	3,13
2	2,27	2,47
3	3,43	1,97

$$(2,4 + 1,9 + 1,3)/3$$



3.2.2. Calcul des effets

Le calcul des effets, dans ce cas, est identique au cas avec 2 niveaux, nous employons la formule générale de calcul des effets moyens.

Moyenne générale des 9 réponses : $M = 2,52$

Nous rappelons la formule générale de calcul des effets moyens.

Effet de A au niveau i :

$$E_{Ai} = \text{Moyenne des réponses lorsque A est au niveau } i - \text{Moyenne générale}$$

Ainsi nous avons :

$$E_{A1} = 1,87 - 2,52 = -0,65$$

$$E_{A2} = 2,27 - 2,52 = -0,25$$

$$E_{A3} = 3,43 - 2,52 = 0,9$$

Nous remarquons tout de suite que comme dans le cas des facteurs à 2 niveaux, nous avons la relation :

$$E_{A1} + E_{A2} + E_{A3} = 0$$

Par la suite, il sera donc inutile de calculer les trois effets. Il suffira de calculer les deux premiers, le troisième sera déduit par la relation précédente.

Le nombre d'effets indépendants est donc de 2, nous dirons que le nombre de **degrés de liberté** du facteur A est de 2, ce qui correspond au nombre de niveaux moins 1.

Les effets de B se calculeraient de la même manière.

On trouverait :

$$E_{B1} = 3,13 - 2,52 = + 0,61$$

$$E_{B2} = 2,47 - 2,52 = - 0,05$$

$$E_{B3} = - (E_{B1} + E_{B2}) = - (0,61 - 0,05) = - 0,56$$

Dans ce cas, la solution recherchée (diminution de la dispersion) consiste à figer le facteur A au niveau 1 et le facteur B au niveau 3.

3.3. Deuxième exemple

Reprenons le même type d'exemple que précédemment, mais avec un nombre de niveaux par facteur différent d'un facteur à l'autre.

- Facteur A - Type de plaquette (2 niveaux)
- Facteur B - Vitesse de coupe (3 niveaux)
- Facteur C - Type de lubrifiant (2 niveaux)

Le plan complet comporte donc $2 \times 3 \times 2 = 2^2 \times 3 = 12$ essais

Essais	A	B	C	Y
1	1	1	1	2,9
2	1	2	1	2,4
3	1	3	1	1,7
4	1	1	2	1,9
5	1	2	2	1,4
6	1	3	2	0,8
7	2	1	1	3,6
8	2	2	1	2,8
9	2	3	1	2,4
10	2	1	2	4,6
11	2	2	2	3,8
12	2	3	2	3,4

Diagramme illustrant la structure du plan expérimental en blocs :
 - Le premier bloc (essais 1 à 6) est noté "1^{er} bloc recopié".
 - Le deuxième bloc (essais 7 à 12) est noté "2^e bloc recopié".
 Les lignes de séparation des blocs sont indiquées par des crochets à droite du tableau.

Figure 2.16 - Plan $2^2 \times 3$

3.3.1. Graphe des effets moyens et des interactions

Nous allons, pour faciliter l'interprétation, représenter l'ensemble des effets et des interactions de façon graphique. Ce graphe nous permet de visualiser l'effet des facteurs, et l'influence des interactions.

Tableau des moyennes

Pour les effets principaux :

M = 2,642	A	B	C
1	1,85	3,25	2,63
2	3,43	2,60	2,65
3		2,08	

Pour les interactions :

	B = 1	B = 2	B = 3
A = 1	2,40	2,60	1,25
A = 2	4,10	3,30	2,90

	B = 1	B = 2	B = 3
C = 1	3,25	2,60	2,05
C = 2	3,25	2,60	2,10

	A = 1	A = 2
C = 1	2,34	2,93
C = 2	1,37	3,93

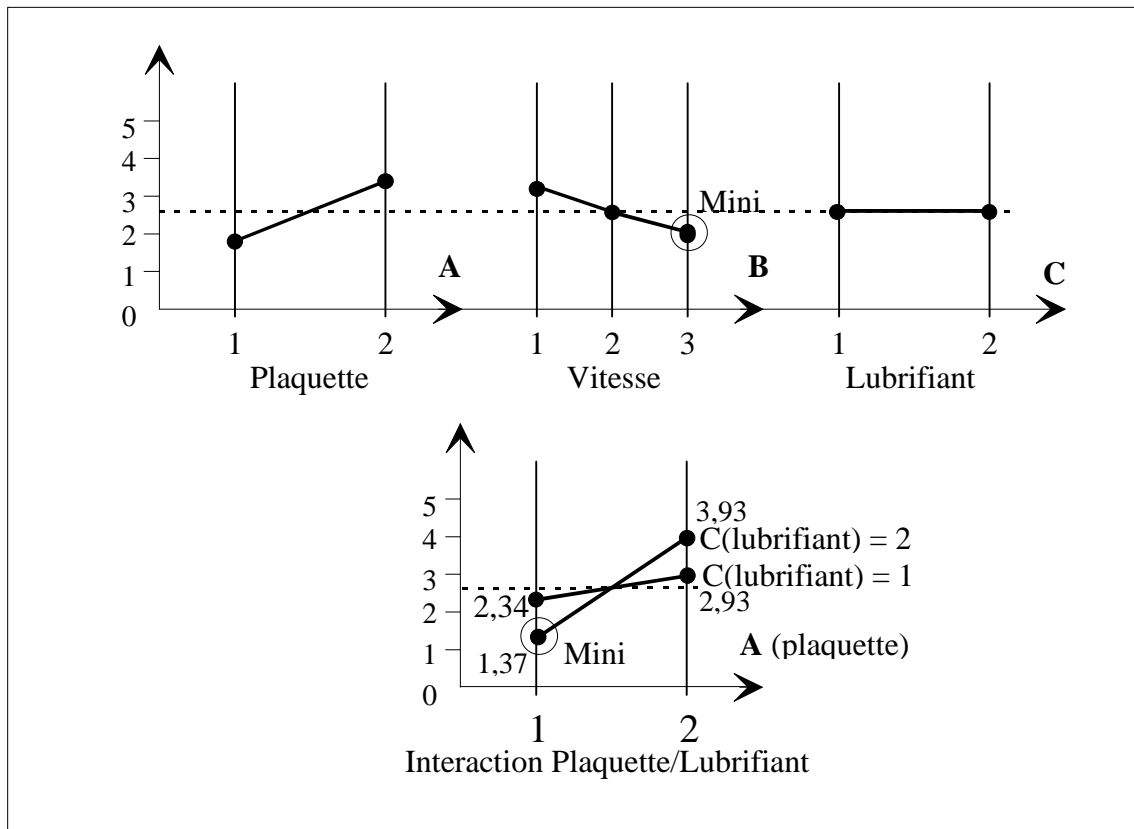


Figure 2.17 - Graphe des interactions

La figure 2.17 représente pour les trois premiers graphiques les effets moyens des facteurs A, B et C. Le quatrième graphique visualise l'interaction non nulle AC.

Pour représenter l'interaction AC, nous avons placé en abscisse le facteur A, et en ordonnée la réponse du système. Sur ce graphe, on note clairement que l'effet du couple AC est quasi-nul lorsque C = 1. Il est par contre très important lorsque C est égal à 2.

3.3.2. Calcul des effets

En employant la méthode habituelle, nous calculons :

$$E_{A1} = 1,85 - 2,642 = -0,792$$

$$E_{A2} = -E_{A1} = +0,792$$

$$E_{B1} = 0,608$$

$$E_{B2} = -0,042$$

$$E_{B3} = -(E_{B1} + E_{B2}) = -0,566$$

$$E_{C1} = -0,01$$

$$E_{C2} = +0,01$$

3.3.3. Calcul des interactions du second ordre

- **Interaction AB**

Le nombre de degré de liberté est :

$$ddl(AB) = ddl(A) \times ddl(B) = (1) \times (2) = 2$$

Il suffit donc de calculer deux interactions, les autres se déduiront.

En appliquant la formule générale des interactions (paragraphe 1.9.), et en utilisant le tableau des moyennes, il vient :

$$I_{A1B1} = 2,40 - 2,64 - (-0,792) - 0,608 = -0,058 \text{ arrondie à } 0$$

$$I_{A1B2} = 2,60 - 2,64 - (-0,792) + 0,042 = +0,092 \text{ arrondie à } 0$$

$$I_{A1B3} = 1,25 - 2,64 - (-0,792) + 0,566 = -0,033 \text{ arrondie à } 0$$

	B=1	B=2	B=3
A=1	I_{A1B1}	I_{A1B2}	I_{A1B3}
A=2	I_{A2B1}	I_{A2B2}	I_{A2B3}

On vérifie que l'on a bien $I_{A1B1} + I_{A1B2} + I_{A1B3} = 0$ (somme des lignes = 0).

Pour calculer l'interaction I_{A2B1} , on applique la relation :

$$I_{A2B1} + I_{A1B1} = 0 \text{ (somme des colonnes = 0).}$$

- **Interaction AC**

$$ddl(AC) = ddl(A) \times ddl(C) = 1 \times 1 = 1$$

$$I_{A1C1} = 2,33 - 2,64 + 0,792 + 0,01 = +0,492$$

$$\text{On en déduit : } I_{A2C1} = -0,492$$

$$I_{A1C2} = -0,492$$

$$I_{A2C2} = +0,492$$

- **Interaction BC**

$$ddl(BC) = ddl(B) \times ddl(C) = 2 \times 1 = 2$$

$$I_{B1C1} = (2,9 + 3,6)/2 - 2,64 - 0,608 + 0,01 = +0,0083 \text{ soit } 0$$

$$I_{B2C1} = (2,4 + 2,8)/2 - 2,64 + 0,042 + 0,01 = +0,0083 \text{ soit } 0$$

On en déduit

$$\text{Somme des colonnes} = 0 \quad I_{B3C1} = 0$$

$$\text{Somme des lignes} = 0 \quad I_{B1C2} = 0 \quad I_{B2C2} = 0 \quad I_{B3C2} = 0$$

3.3.4. Conclusion sur cette étude

Le but de l'étude est de diminuer la dispersion. L'optimum est trouvé facilement en regardant les graphes des effets.

Le facteur B n'est pas lié par une interaction, son interprétation est donc immédiate, il suffit de retenir le niveau qui donne la dispersion mini, c'est-à-dire le niveau 3.

Pour les facteurs A et C , il ne faut pas tenir compte des seuls effets, mais également de l'interaction qui lie ces deux facteurs. Le facteur C n'a pas d'effet principal sur la dispersion étudiée, mais amplifie l'effet du facteur A .

Pour trouver l'optimum, il suffit de regarder le graphe de l'interaction AC et de retenir la configuration qui donne le mini, c'est-à-dire $A = 1$ et $C=2$.

3.3.5. Prédiction du résultat

À partir des effets moyens et des interactions que nous avons calculés, nous pouvons prédire le résultat correspondant à la configuration optimale. Pour cela, on additionne à la moyenne générale tous les effets correspondants à la configuration retenue.

Moyenne générale	M	=	2,642
Effet de A au niveau 1	+	E_{A1}	= - 0,792
Effet de B au niveau 3	+	E_{B3}	= - 0,566
Effet de C au niveau 2	+	E_{C2}	= 0
Interaction $A=1$ et $C=2$	+	I_{A1C2}	= - 0,492
Prédiction	=		0,792

L'essai a été réalisé car on a fait le plan complet. Le résultat est de 0,8 ce qui donne comme résidu :

$$r = 0,8 - 0,79 = 0,01$$

4. Modèle matriciel du système étudié

Pour faciliter l'interprétation des effets des facteurs, il est préférable d'écrire un modèle du procédé. M. Vigier et Sisson proposent une écriture sous forme matricielle de ce modèle. Ce modèle est particulièrement simple à exploiter, et nous le retiendrons dans notre démarche.

4.1. Notation

- La réponse théorique (calculée par le modèle) est notée $Y\sim$.
- Les facteurs seront représentés par des vecteurs que nous noterons $[A]$.

Si le facteur A est au niveau 1, $[A]$ sera égal à $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Si le facteur A est au niveau 2, $[A]$ sera égal à $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

Nous noterons ${}^t[A]$ le vecteur transposé de $[A]$

$${}^t[A] = [1 \ 0] \text{ si } A \text{ est au niveau } 1$$

Les auteurs de cette modélisation proposent d'appeler ce vecteur un indicateur de niveau. Les effets et les interactions seront modélisés par des matrices.

4.2. Application sur un modèle simple

Reprenons l'exemple que nous avons calculé au paragraphe 3.5.

- Facteur A - Type de plaquette (1 ou 2).
- Facteur B - Vitesse de coupe (3 niveaux).
- Facteur C - Type de lubrifiant (2 niveaux).

Le modèle recherché sera du type : $Y_{\sim} = M + A + B + C + AB + AC + BC$.

Nous cherchons donc à modéliser les effets des facteurs A , B , C , ainsi que les interactions AB , AC , et BC . La modélisation matricielle s'écrira :

$$\begin{aligned}
 Y_{\sim} = & \quad M && \text{Moyenne générale} \\
 & + \quad [E_{A1} \ E_{A2}] [A] && \text{Effet de } A \\
 & + \quad [E_{B1} \ E_{B2} \ E_{B3}] [B] && \text{Effet de } B \\
 & + \quad [E_{C1} \ E_{C2}] [C] && \text{Effet de } C \\
 & + \quad {}^t[A] \begin{bmatrix} I_{A1B1} & I_{A1B2} & I_{A1B3} \\ I_{A2B1} & I_{A2B2} & I_{A2B3} \end{bmatrix} [B] && \text{Interaction } AB \\
 & + \quad {}^t[A] \begin{bmatrix} I_{A1C1} & I_{A1C2} \\ I_{A2C1} & I_{A2C2} \end{bmatrix} [C] && \text{Interaction } AC \\
 & + \quad {}^t[B] \begin{bmatrix} I_{B1C1} & I_{B1C2} \\ I_{B2C1} & I_{B2C2} \\ I_{B3C1} & I_{B3C2} \end{bmatrix} [C] && \text{Interaction } BC
 \end{aligned}$$

Ce qui donne en application numérique :

$$\begin{aligned}
 Y_{\sim} = & 2,6 + [-0,8 \ 0,8][A] + [+0,6 \ 0 \ -0,57][B] + [0 \ 0][C] \\
 & + {}^t[A] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [B] + {}^t[A] \begin{bmatrix} 0,49 & -0,49 \\ -0,49 & 0,49 \end{bmatrix} [C] + {}^t[B] \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [C]
 \end{aligned}$$

En ne retenant que les effets de A et de B ainsi que l'interaction AC , le modèle s'écrit :

$$Y_{\sim} = 2,6 + [-0,8 \ 0,8][A] + [+0,6 \ 0 \ -0,57][B] + {}^t[A] \begin{bmatrix} 0,49 & -0,49 \\ -0,49 & 0,49 \end{bmatrix} [C]$$

4.3. Calcul de la réponse théorique

Si nous souhaitons calculer la réponse fournie par le modèle dans une configuration donnée, il suffit de faire les multiplications matricielles (très simples dans le cas des indicateurs de niveau).

Exemple

$$A \text{ au niveau 1} \implies [A] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$B \text{ au niveau 3} \implies [B] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$C \text{ au niveau 2} \implies [C] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Ce qui correspond à la situation ci-dessous.

$$Y_{\sim} = 2,6 + \begin{matrix} 1 & 2 \\ [-0,8 & +0,8] \end{matrix} [A] + \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ [+0,6 & 0 & -0,57] \end{matrix} [B] + \begin{matrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{matrix} [A] \begin{matrix} 1 & 2 \\ \left[\begin{matrix} 0,49 & -0,49 \\ -0,49 & 0,49 \end{matrix} \right] \end{matrix} [C]$$

Les multiplications matricielles reviennent à ne retenir que les valeurs en gras.

$$D'où Y_{\sim} = 2,6 + (-0,8) + (-0,57) + (-0,49) = 0,74.$$

La différence avec 0,792 trouvée au paragraphe 3.5.5. provient des arrondis que nous avons faits dans les effets et les interactions.

4.4. Cas des interactions du troisième ordre

La représentation des interactions du troisième ordre (de type ABC) est un peu plus complexe.

Nous la représenterons par :

$$[{}^t[A][M1_{AB}][B] \quad {}^t[A][M2_{AB}][B] \quad {}^t[A][M3_{AB}][B]] [C]$$

- . où $M1_{AB}$ représente l'interaction AB lorsque $C = 1$;
- . où $M2_{AB}$ représente l'interaction AB lorsque $C = 2$;
- . où $M3_{AB}$ représente l'interaction AB lorsque $C = 3$.

Ce qui revient à représenter une matrice d'interaction en trois dimensions. En général, nous négligerons les interactions du troisième ordre.

4.5. Modélisation entre les niveaux des facteurs

Il arrive parfois que lors de l'interprétation du modèle, on soit amené à choisir un niveau intermédiaire par rapport aux niveaux choisis pour les essais. Dans ce cas, le calcul de la réponse théorique n'est pas possible directement à partir du modèle. Il faut faire une interpolation. Plusieurs solutions sont possibles avec des degrés de complexité différents. Les principales sont les suivantes :

1. interpolation à partir des graphes des effets moyens ;
2. utilisation de la modélisation matricielle par transformation des indicateurs de niveaux ;
3. utilisation du modèle polynomial dans le cas des plans à 2 niveaux ;
4. modélisation en surface de réponse.

Nous nous limiterons aux trois premières méthodes qui sont très souvent largement suffisantes dans les applications industrielles. Le lecteur qui souhaite avoir plus d'informations sur la modélisation en surface de réponse pourra se reporter à des ouvrages spécialisés notamment *Statistics for experimenters* de George E.P. Box, William G.Hunter et J.Stuart Hunter.

4.5.1 Interpolation à partir des graphes des effets moyens

C'est le cas le plus simple. On considère qu'entre deux niveaux la réponse est linéaire. L'interpolation est donc une interpolation linéaire qui peut être réalisée graphiquement. La figure 2.18 montre une interpolation linéaire à partir des graphes des effets moyens dans le cas d'un facteur à 2 niveaux et d'un facteur à 3 niveaux.

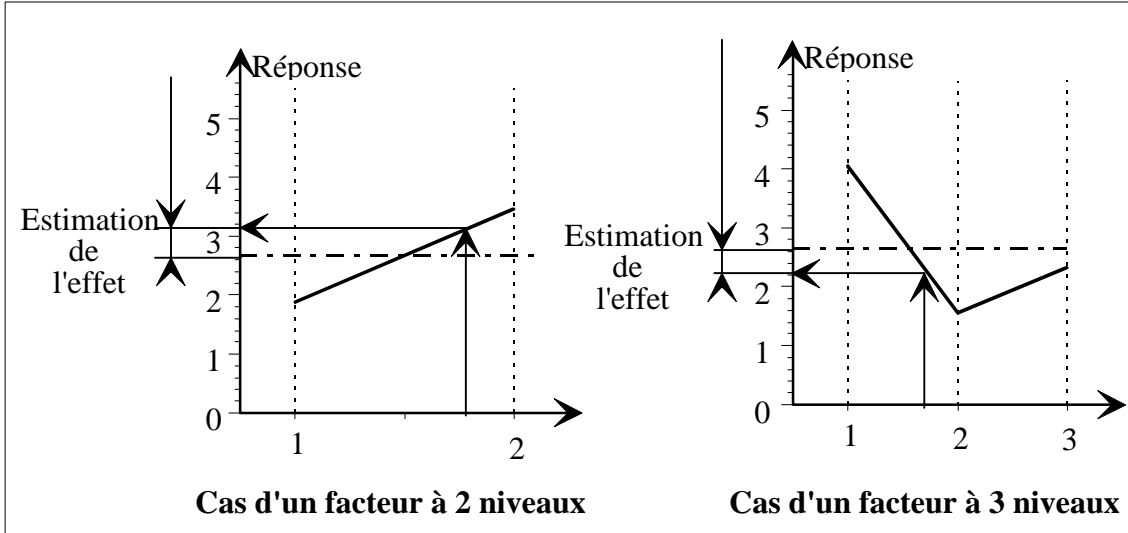


Figure 2.18 - Interpolation à partir des graphes d'effets

4.5.2. Interpolation à partir de la méthode matricielle

Considérons un modèle comportant 3 facteurs A, B et C dont le modèle est le suivant :

$$Y \sim I + A + B + C + AB$$

Niveaux 2 3 2

Les niveaux ont été fixés de la façon suivante :

Facteurs	Unités	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
A	Ampères	5	10	
B	Volts	90	130	170
C	Ohm	5	10	

Le calcul des coefficients a donné comme modèle :

$$Y \sim = 530 + [-30 \quad +30]A + [-25 \quad -10 \quad +35]B + [+25 \quad -25]C$$

$${}^t[A] \begin{bmatrix} -15 & 5 & 10 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix} [B]$$

On a vu que pour calculer la réponse théorique, il suffisait de placer les indicateurs de niveaux en fonction de l'état du facteur. Nous avons par exemple lorsque A est au niveau 1 l'indicateur de niveaux suivant :

$$A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} InA1 \\ InA2 \end{bmatrix}$$

Indicateur de niveau
pour A = 1

Nous souhaitons calculer la réponse théorique pour les valeurs suivantes :

$$A = 7, B = 110, C = 10.$$

La méthode proposée par M. Roux consiste à fixer les indicateurs de niveaux non plus en 1 ou 0 mais en fonction des valeurs prises par les facteurs. Les notations utilisées seront :

- $InA1$: premier indicateur de niveaux du facteur A ;
- A : valeur prise par le facteur A (ici 7) ;
- $A1$: valeur du niveau 1 de A (ici 5) ;
- $A2$: valeur du niveau 2 de A (ici 10).

Calcul des indicateurs de niveaux $InA1$ et $InA2$:

$$\text{On pose simplement } InA1 = \frac{(A - A2)}{(A1 - A2)} \text{ et } InA2 = \frac{(A - A1)}{(A2 - A1)}$$

Pour le facteur B, on a :

$$InB1 = \frac{(B - B2)(B - B3)}{(B1 - B2)(B1 - B3)} \quad InB2 = \frac{(B - B1)(B - B3)}{(B2 - B1)(B2 - B3)} \quad InB3 = \frac{(B - B1)(B - B2)}{(B3 - B1)(B3 - B2)}$$

Pour le facteur C, on a :

$$InC1 = \frac{(C - C2)}{(C1 - C2)} \text{ et } InC2 = \frac{(C - C1)}{(C2 - C1)}$$

Application numérique

$$InA1 = \frac{7 - 10}{5 - 10} = 3/5 = 0,6$$

$$InA2 = \frac{7 - 5}{10 - 5} = 2/5 = 0,4$$

$$InB1 = \frac{(110 - 130)(110 - 170)}{(90 - 130)(90 - 170)} = 0,375$$

$$InB2 = \frac{(110 - 90)(110 - 170)}{(130 - 90)(130 - 170)} = 0,75$$

$$InB3 = \frac{(110 - 90)(110 - 130)}{(170 - 90)(170 - 130)} = -0,125$$

$$InC1 = \frac{10 - 10}{5 - 10} = 0$$

$$InC2 = \frac{10 - 5}{10 - 5} = 1$$

Calcul de la réponse théorique

Pour calculer la réponse théorique, il suffit de faire les opérations matricielles et on trouve :

$$Y_{\sim} = 530 + [-30 \quad 30] \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,4 \end{bmatrix} + [-25 \quad -10 \quad 35] \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,75 \\ -0,125 \end{bmatrix} + [25 \quad -25] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\ + [0,6 \quad 0,4] \begin{bmatrix} -15 & 5 & 10 \\ 15 & -5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,75 \\ -0,125 \end{bmatrix}$$

$$Y_{\sim} = 477,125$$

Bien entendu, cette méthode n'est qu'une interpolation, mais elle offre l'avantage de la simplicité sur la modélisation en surface de réponse et elle est très facilement programmable pour obtenir n'importe quelle réponse. La généralisation aux facteurs de plus de 3 niveaux est évidente.

5. Modélisation polynomiale

5.1. Principe

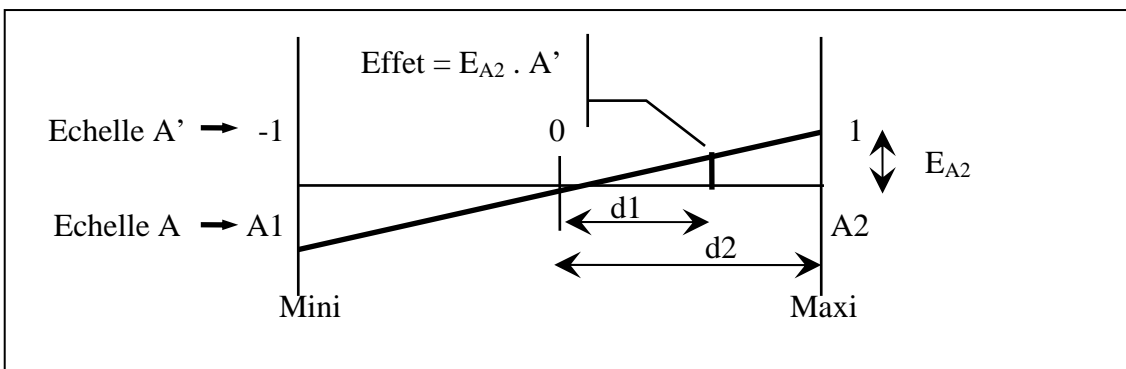
Une autre possibilité pour modéliser le comportement du système consiste à utiliser un polynôme du type

$$Y \sim a_0 + a_1.A + a_2.B + a_3.C + \dots + b_1.AB + b_2.AC + b_3.AC + \dots$$

Dans le cas des plans d'expériences à deux niveaux, l'obtention de ce polynôme est immédiat à partir du calcul des effets moyens et des interactions. Le polynôme s'écrit :

$$Y \sim \bar{X} + E_{A2}.A' + E_{B2}.B' + E_{C2}.C' + I_{A2B2}.A'.B' + I_{A2C2}.A'.C' + I_{B2C2}.B'.C'$$

Les facteurs A' , C' , D' , E' et F' sont calculés de manière à être des facteurs centrés. Ils sont égaux à 1 lorsque le facteur est au maxi et à -1 lorsque le facteur est au mini.



Pour passer des facteurs A , B , C et D aux facteurs A' , B' , C' et D' on emploie la formule de centrage des facteurs (règle de 3).

$$A' = \frac{d1}{d2} \quad \text{Soit} \quad A' = 2 \cdot \frac{A - \frac{A1 + A2}{2}}{A2 - A1}$$

5.2. Application

Reprenons l'exemple du four à micro-ondes du paragraphe 2.

Facteur	Description	Niveau 1	Niveau 2
A	Puissance du four	Medium (3)	Fort (5)
B	Temps de chauffage	1'00	1'30''
C	Position sur le plateau	Bord	Centre

Nous avons trouvé :

Moyenne générale = 60

$$\begin{array}{ll}
 E_{A1} = -10 & E_{A2} = +10 \\
 E_{B1} = -7,5 & E_{B2} = +7,5 \\
 E_{C1} = -1,75 & E_{C2} = +1,75
 \end{array}$$

Seule l'interaction AB est significative

$$I_{A1B1} = +2 \quad I_{A1B2} = -2 \quad I_{A2B1} = -2 \quad I_{A2B2} = -2.$$

Le modèle polynomial s'écrit :

$$Y \sim = 60 + 10.A' + 7,5.B' + 1,75.C' - 2.A'B'$$

Calculons la prévision du résultat pour la configuration :

	A Puissance	B Temps	C Position
Niveaux	Position 4	1'20''	Centre
Niveaux réduits	0	$5/15 = 0,33$	1

$$Y \sim = 60 + 10 \times 0 + 7,5 \times 0,33 + 1,75 \times 1 - 2 \times 0 \times 0,33 = 64,2^\circ C$$

Chapitre 3

Les plans d'expériences fractionnaires

1. Pourquoi des plans fractionnaires ?

Dans le chapitre 2, nous ne nous sommes intéressés qu'aux plans complets pour lesquels chaque nœud du maillage donne lieu à un essai. Dans ce type de plan d'expériences, toutes les interactions peuvent être calculées, ce sont des plans sans risque pour l'expérimentateur. Nous avons également abordé la "mécanique" des plans d'expériences, c'est-à-dire les techniques de calcul des effets et des interactions. Les méthodes de calcul et de représentation exposées au chapitre 2 resteront les mêmes dans le cas des plans fractionnaires.

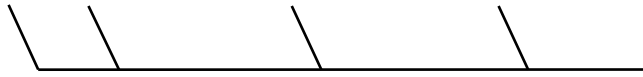
Nous avons remarqué que, lorsque le nombre de facteurs ou le nombre de niveaux pris par les facteurs augmente, ces plans donnaient très vite un nombre d'essais peu compatible avec les réalités industrielles.

La question que l'on peut se poser est alors la suivante : est-il nécessaire de réaliser toutes les expériences du plan complet pour estimer le modèle du système ? En d'autres termes, est-il nécessaire de réaliser un essai à chaque nœud du maillage retenu ?

Cette question a amené de nombreux scientifiques à la mise au point de plans "fractionnaires" du plan complet qui permettent de trouver les coefficients du modèle avec beaucoup moins d'essais que ce dernier.

En effet, pour étudier un modèle comportant par exemple **trois** facteurs à deux niveaux, **mais pas d'interaction**, il faut identifier quatre coefficients (la moyenne et les trois effets).

$$Y \sim = M + [E_{A1} \ E_{A2}] A + [E_{B1} \ E_{B2}] B + [E_{C1} \ E_{C2}] C$$



Coefficients à identifier

Il est donc nécessaire de réaliser quatre essais (autant d'équations que d'inconnues). Pourtant, le plan complet comporte $2^3 = 8$ essais. On peut donc déterminer ce modèle en "économisant" quatre essais.

Cependant, le plan fractionnaire à quatre essais, ne permettra pas d'étudier les interactions (supposées nulles). Dans le cas où une interaction parmi les quatre possibles (AB, AC, BC, ABC) est non nulle, les coefficients du modèle seront perturbés par cette interaction. Ainsi, l'utilisation des plans fractionnaires n'est pas sans risque. Nous nous proposons d'étudier dans ce chapitre :

- les conditions nécessaires pour établir un plan fractionnaire ;
- les risques associés à l'utilisation d'un plan fractionnaire.

Les plans d'expériences du Dr Taguchi font partie de ces plans fractionnaires, mais avec un avantage important, la facilité de mise en pratique de ces plans grâce à quelques astuces qui simplifient la tâche de l'expérimentateur. Le chapitre 4 sera consacré plus particulièrement aux plans fractionnaires proposés par le Dr Taguchi, ainsi qu'à la démarche pour les établir.

Avant de rentrer dans les détails des plans fractionnaires, nous allons regarder le plan $L_4 (2^3)$ de Taguchi qui permet d'étudier trois facteurs à partir de 4 essais. Il s'agit donc d'un plan fractionnaire. Parmi les huit essais possibles, on ne retient que quatre essais, **mais pas n'importe lesquels !** La figure 3.1 indique les essais retenus par Taguchi sur les huit essais possibles. On constate que ces essais sont placés de façon astucieuse. Dans chaque plan, il y a 2 essais. Ainsi, pour calculer l'effet du facteur A, il faut comparer la moyenne des essais 3 et 4 avec les essais 1 et 2. On remarque que lors des essais 3/4 et 1/2, les facteurs B et C sont chacun une fois à 1 et une fois à 2.

N°	A	B	C
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

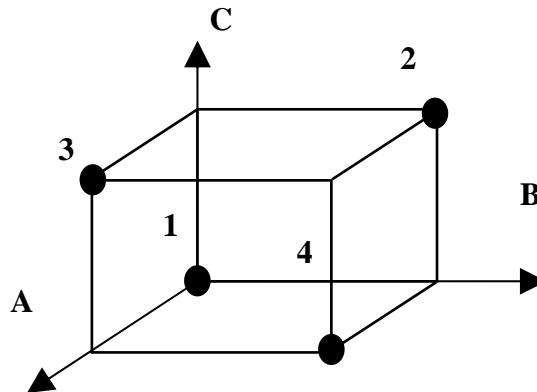


Figure 3.1 - Plan fractionnaire $L_4 (2^3)$

C'est sur ce principe général que sont bâtis les plans fractionnaires, il nous reste à étudier les conditions de construction de tels plans.

2. Condition sur le nombre de degrés de liberté

Comme nous l'avons souligné à de nombreuses reprises depuis le début de cet ouvrage, le nombre de degrés de liberté d'un modèle indique le nombre de valeurs qu'il est nécessaire de calculer pour connaître l'ensemble des coefficients du modèle.

Pour identifier une droite d'équation $Y \sim = aX + b$, il faut au moins deux essais car il a deux coefficients à identifier (a et b).

D'une façon générale, pour être capable de calculer X valeurs indépendantes, il faut introduire dans les calculs au moins X valeurs indépendantes. Les valeurs introduites dans les calculs sont les essais réalisés. Il est donc nécessaire de faire au moins autant d'essais qu'il y a de degrés de liberté dans le modèle.

Par exemple, nous recherchons un plan fractionnaire permettant d'identifier le modèle suivant :

	$Y \sim =$	$M +$	$A +$	$B +$	$C +$	$D +$	$BC +$	CD
Niveaux		3	3	2	3	6	6	
ddl		1	2	2	1	2	2	2

- Les facteurs A , B et D sont des facteurs à 3 niveaux (2 degrés de liberté *ddl*).
- Le facteur C est à 2 niveaux (1 degré de liberté).
- Les interactions BC et CD comportent 6 niveaux (produit des nombres de niveaux des facteurs), elles ont donc 2 degrés de liberté (produit des *ddl* des facteurs).

Le modèle matriciel s'écrit :

$$Y \sim = \underline{M} + \begin{bmatrix} \underline{E_{A1}} & \underline{E_{A2}} & \underline{E_{A3}} \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} \underline{E_{B1}} & \underline{E_{B2}} & \underline{E_{B3}} \end{bmatrix} B + \begin{bmatrix} \underline{E_{C1}} & \underline{E_{C2}} \end{bmatrix} C \\ + \begin{bmatrix} \underline{E_{D1}} & \underline{E_{D2}} & \underline{E_{D3}} \end{bmatrix} D + C \begin{bmatrix} \underline{I_{B1C1}} & \underline{I_{B2C1}} & \underline{I_{B3C1}} \\ \underline{I_{B1C2}} & \underline{I_{B2C2}} & \underline{I_{B3C2}} \end{bmatrix} B + C \begin{bmatrix} \underline{I_{C1D1}} & \underline{I_{C1D2}} & \underline{I_{C1D3}} \\ \underline{I_{C2D1}} & \underline{I_{C2D2}} & \underline{I_{C2D3}} \end{bmatrix} D$$

Pour calculer les coefficients du modèle, il faut calculer les valeurs soulignées (les autres valeurs se déduisent) :

- la moyenne (1 *ddl*) ;
- les deux premiers coefficients des effets de A car le troisième se déduit (2 *ddl*) ;
-
- les deux premiers coefficients de l'interaction CD car les quatre suivants se déduisent (2 *ddl*).

Il y a douze valeurs à calculer pour connaître le modèle, le nombre de degrés de liberté du modèle est donc de 12. Il faudra alors que le plan retenu comporte au moins 12 expériences.

Règle : Le nombre minimal d'expériences à réaliser est égal au nombre de degrés de liberté du modèle étudié.

Remarque :

Si l'on veut étudier le modèle complet, c'est-à-dire calculer toutes les interactions, il faut nécessairement effectuer le plan complet.

3. Condition d'orthogonalité

3.1. Définition de l'orthogonalité

Construire un plan fractionnaire n'est pas toujours simple. Il faut qu'il vérifie un certain nombre de propriétés dont la première est le nombre de degré de liberté. Une autre condition à remplir est l'orthogonalité. Cette condition est indispensable pour pouvoir calculer les effets d'un facteur indépendamment des autres facteurs.

Pour expliquer cette condition, nous allons supposer un système à 2 facteurs principaux : A et B ayant chacun 2 niveaux.

Lorsqu'on calcule l'effet du facteur A au niveau 1, il faut que le facteur B soit autant de fois au niveau 1 qu'au niveau 2, sinon l'effet de B biaiserait le calcul de l'effet de A.

Cette propriété doit évidemment se reproduire lorsqu'on calcule l'effet de A au niveau 2, et de façon réciproque lorsqu'on calcule les effets de B.

Exemple sur un plan complet

- Facteur A : 3 niveaux
- Facteur B : 2 niveaux

Cette orthogonalité est évidente du fait même de la méthode de construction du plan.

Essai	A	B
1	1	1
2	1	2
3	2	1
4	2	2
5	3	1
6	3	2

Essais 1 et 2 : lorsque A est au niveau 1
B est une fois à 1 et une fois à 2

Essais 2, 4 et 6 : lorsque B est au niveau 2
A est une fois à 1, une fois à 2 et une fois à 3

Nous appellerons ACTION un facteur ou une interaction entre facteurs. Aussi, nous pouvons définir la notion d'orthogonalité que nous venons de voir par la condition suivante :

Condition nécessaire et suffisante d'orthogonalité de 2 actions

Deux actions disjointes, c'est-à-dire ne comportant pas de facteurs en commun, sont orthogonales si à chaque niveau de l'une, tous les niveaux de l'autre sont associés le même nombre de fois dans le plan d'expériences.

Orthogonalité d'un plan d'expériences

Un plan d'expériences est orthogonal vis-à-vis d'un modèle, si toutes les actions disjointes du modèle sont orthogonales dans le plan d'expériences.

3.2. Méthode de vérification de l'orthogonalité

La méthode décrite ci-dessous, très simple d'utilisation, est due à M. Sisson et Vigier.

Soient deux actions deux à deux disjointes (A et B) :

- l'action A comporte n niveaux ;
- l'action B comporte m niveaux.

Tableau d'incidence des actions A et B : T(A, B)

		B					
		1	2	.	j	.	m
A	1				.		
	2				.		
	.				.		
	i	.	.	.	C _{ij}		
	.						
	.						
	n						

Nous pouvons établir le tableau d'incidence, dans lequel nous compterons dans la case C_{ij} le nombre de fois qu'apparaîtra la combinaison A au niveau i et B au niveau j dans le plan d'expériences.

Exemple : Plan complet 2²

Tableau d'incidence

N°	A	B
1	1	1
2	1	2
3	2	1
4	2	2

		B	
		1	2
A	1	1	1
	2	1	1

Pour que le tableau d'incidence ait tous ses termes non nuls et égaux entre eux, le nombre d'expériences doit nécessairement être un multiple de 4. On peut généraliser cet exemple par la règle :

Règle d'orthogonalité

Les actions A et B seront orthogonales si le tableau d'incidence T(A, B) a tous ses termes non nuls et égaux entre eux. Le plan d'expériences aura donc comme nombre de lignes un MULTIPLE du nombre de cases du tableau d'incidence.

Conséquence fondamentale de cette règle

Comme toutes les actions du modèle doivent être orthogonales pour que le plan soit orthogonal, nous pouvons établir une condition nécessaire mais non suffisante pour trouver un plan susceptible d'être orthogonal vis-à-vis d'un modèle.

Un plan devra être le Plus Petit Commun Multiple (PPCM) du produit du nombre de niveaux de toutes les actions disjointes prises deux à deux.

Application de cette règle

Nous recherchons un plan orthogonal vis-à-vis du modèle suivant :

$$Y \sim = M + A + B + C + D + BC + CD$$

- Les facteurs A , B et D sont des facteurs à 3 niveaux.
- Le facteur C est à 2 niveaux.
- Les interactions BC et CD comportent donc 6 niveaux.

Les actions jointes de ce plan sont les suivantes :

B et BC , C et BC , C et CD , D et CD , BC et CD . Ces actions sont jointes parce qu'il y a un facteur en commun.

Conditions sur les actions disjointes	Conséquences
A ortho à B	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
A ortho à C	Le plan est un multiple de $3 \times 2 = 6$
A ortho à D	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
A ortho à BC	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
A ortho à CD	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
B ortho à C	Le plan est un multiple de $3 \times 2 = 6$
B ortho à D	Le plan est un multiple de $3 \times 3 = 9$
B ortho à CD	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$
C ortho à D	Le plan est un multiple de $2 \times 3 = 6$
D ortho à BC	Le plan est un multiple de $3 \times 6 = 18$

Le plus petit plan orthogonal que l'on puisse trouver est un plan comportant PPCM (9, 6, 18) expériences, c'est donc un plan comportant 18 essais. Si ce n'est pas possible, il faudra le chercher dans un plan de 36 essais ou 54 essais. Dans ce cas, le plan complet comporte $3 \times 3 \times 2 \times 3 = 54$ essais.

Pour simplifier l'écriture lors de la vérification de l'orthogonalité, on aura intérêt à utiliser le tableau à double entrée figure 3.2.

A	3	*					
B	3	3^2	*				
C	2	2×3	2×3	*			
D	3	3^2	3^2	2×3	*		
BC	2×3	2×3^2	*	*	2×3^2	*	
CD	2×3	2×3^2	2×3^2	*	*	*	*
		3	3	2	3	2×3	2×3
		A	B	C	D	BC	CD

Figure 3.2 - Recherche de la condition sur le PPCM

Pour construire ce tableau, nous avons :

- placé chaque action intervenant dans le modèle en lignes et en colonnes avec son nombre de niveaux décomposé en nombre premier (l'interaction BC à 6 niveaux a été décomposée en 2×3) ;
- placé une étoile (*) à chaque intersection d'actions jointes ;
- calculé le produit des nombres de niveaux à chaque intersection entre deux actions, le produit étant noté sous la forme de sa décomposition en nombre premier.

À partir de ce tableau, le PPCM apparaît immédiatement. Il suffit de trouver le produit de tous les nombres premiers intervenant dans le tableau, pris à leur puissance la plus élevée. Ainsi, le PPCM est égal à $2 \times 3^2 = 18$.

Cette présentation possède l'avantage de faire apparaître immédiatement les actions coûteuses en nombre d'essais.

Conclusion sur cet exemple

En appliquant la règle de l'orthogonalité, nous avons trouvé comme condition sur le plan qu'il devait avoir un nombre de lignes égal ou multiple de 18.

En appliquant la règle des degrés de liberté, nous avons trouvé comme condition sur le plan qu'il devait avoir un nombre de lignes supérieur ou égal à 12.

En appliquant ces deux conditions, nous savons que le plus petit plan orthogonal vis-à-vis de ce modèle est un plan comportant 18 essais.

3.3. Cas des plans à deux et trois niveaux

Dans le cas des plans où tous les facteurs sont à deux niveaux, ou lorsque les facteurs sont tous à trois niveaux, la règle du PPCM se simplifie car on trouve les résultats généraux suivants.

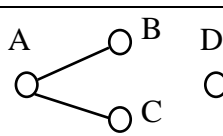
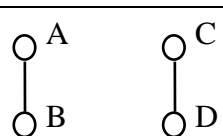
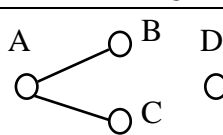
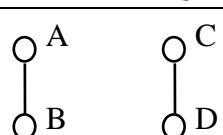
Cas des plans à 2 niveaux			
Situation	Pas d'interaction dans le modèle	Pas d'interaction disjointe dans le modèle	Au moins une interaction disjointe dans le modèle
Exemple de modèle	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D$	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + AC$	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + CD$
Représentation Graphique	A B C D ○ ○ ○ ○		
PPCM	PPCM = 4	PPCM = 8	PPCM = 16
Tables	L ₄ , L ₈ , L ₁₂ , L ₁₆ , L ₂₀ ,...	L ₈ , L ₁₆ , L ₂₄ ,...	L ₁₆ , L ₃₂ ,...
Cas des plans à 3 niveaux			
Situation	Pas d'interaction dans le modèle	Pas d'interaction disjointe dans le modèle	Au moins une interaction disjointe dans le modèle
Exemple de modèle	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D$	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + AC$	$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + CD$
Représentation Graphique	A B C D ○ ○ ○ ○		
PPCM	PPCM = 9	PPCM = 27	PPCM = 81
Tables	L ₉ , L ₁₈ , L ₂₇ ,...	L ₂₇ , L ₅₄ ,...	L ₈₁ , L ₁₆₂ ,...

Figure 3.3 - Classification des plans en fonction du PPCM

On le constate aisément, ce type de plan d'expériences n'est pas fait pour étudier des modèles à trois niveaux comportant des interactions disjointes. Il existe d'autres types de plans parfaitement adaptés à l'étude des surfaces de réponses complexes, nécessitant beaucoup moins d'essais pour ce type de modèle. Nous donnons dans le chapitre 8 un exemple de plan de ce type, mais l'étude détaillée des plans pour surface de réponse sort du cadre de cet ouvrage.

4. Recherche de plans orthogonaux minimums

4.1. Cas des nombres de niveaux premiers entre eux

Nous recherchons le plan minimal orthogonal vis-à-vis du modèle suivant :

$Y_{\sim} = M + A + B + C + D$, les facteurs ayant comme nombre de niveaux

Facteurs	A	B	C	D
Niveaux	2	3	5	7

Le nombre de degrés de liberté de ce modèle est de :

Moyenne : 1 ddl

Facteur A : 1 ddl

Facteur B : 2 ddl

Il faut donc que le plan comporte au moins 14 essais.

Facteur C : 4 ddl

Facteur D : 6 ddl

La condition d'orthogonalité de ce plan s'exprime en remplissant le tableau à double entrée :

A	2	*			
B	3	2x3	*		
C	5	2x5	3x5	*	
D	7	2x7	3x7	5x7	*
		2	3	5	7
		A	B	C	D

Le PPCM est de $2 \times 3 \times 5 \times 7 = 210$. **Le plan minimal est donc le plan complet, il n'existe pas de plan fractionnaire pour ce modèle.**

Nous venons de voir une règle très importante dans le choix des nombres de niveaux. Il est très important pour minimiser le nombre d'essais de choisir des nombres de niveaux non premiers entre eux.

Même exemple mais avec un choix judicieux du nombre de niveaux

Nous recherchons le plan minimal orthogonal vis-à-vis du modèle suivant :

$Y_{\sim} = M + A + B + C + D$, les facteurs ayant comme nombre de niveaux

Facteurs	A	B	C	D
Niveaux	2	4	4	8

Le nombre de degrés de liberté de ce modèle est de 15. Il faut donc que le plan comporte plus de 15 essais. La condition d'orthogonalité de ce plan s'exprime en remplissant le tableau à double entrée :

A	2	*			
B	2 ²	2 ³	*		
C	2 ²	2 ³	2 ⁴	*	
D	2 ³	2 ⁴	2 ⁵	2 ⁵	*
	2	2 ²	2 ²	2 ³	
	A	B	C	D	

Le PPCM est de 2⁵ = 32, le plan minimal comporte 32 essais.

Dans cet exemple, nous avons montré que par un choix judicieux du nombre de niveaux, il était possible de passer d'un plan de 210 essais à un plan de 32 essais. L'application de cette règle est fondamentale pour diminuer le nombre d'expériences.

4.2. Cas des interactions disjointes

Nous avons vu au paragraphe 4.1. que choisir des nombres de niveaux premiers entre eux coûtait fort cher en nombre d'essais. Nous allons voir également qu'un modèle comportant des interactions disjointes demande beaucoup d'essais.

Etudions le modèle suivant :

$Y \sim$	M	$+$	A	$+$	B	$+$	C	$+$	D	$+$	AB	$+$	AC	$+$	CD
nb de niveaux			2		2		2		2		4		4		4
Nb de ddl	1		1		1		1		1		1		1		1

Le nombre de degré de liberté est de 8. Il faut que le plan comporte au moins 8 essais.

Règle d'orthogonalité : Il y a une interaction disjointe, et tous les facteurs sont à deux niveaux, le PPCM est donc de 16 (voir figure 3.3 page 65). On retrouve ce résultat en établissant le tableau suivant :

A	2	*						
B	2	2 ²	*					
C	2	2 ²	2 ²	*				
D	2	2 ²	2 ²	2 ²	*			
AB	2 ²	*	*	2 ³	2 ³	*		
AC	2 ²	*	2 ³	*	2 ³	*	*	
CD	2 ²	2 ³	2 ³	*	*	2 ⁴	*	*
	2	2	2	2	2 ²	2 ²	2 ²	
	A	B	C	D	AB	AC	CD	

Le PPCM est de 2⁴ = 16. Le nombre minimal d'essais est donc de 16.

Le tableau nous montre que la puissance 4 apparaît avec l'orthogonalité des interactions disjointes AB/CD. En l'absence de l'interaction CD, le PPCM serait de 8, il faudrait deux fois moins d'expériences.

Ce petit exemple nous montre l'intérêt à bien étudier le modèle avant de faire le plan d'expériences. Le choix de certaines interactions coûte très cher en essais, et conduit parfois à doubler le prix. Aussi faut-il se poser la question suivante : l'étude de cette interaction mérite-t-elle un tel surcoût ?

4.3. Conclusions

Les deux études que nous avons menées dans ce paragraphe nous conduisent à deux règles de minimisation du nombre d'expériences :

- **1** : Eviter de prendre des nombres de niveaux premiers entre eux ;
- **2** : N'étudier des interactions disjointes que lorsque cela est indispensable.

5. Plans de type 2^n , notions d'alias

5.1 Fractionnement d'un plan

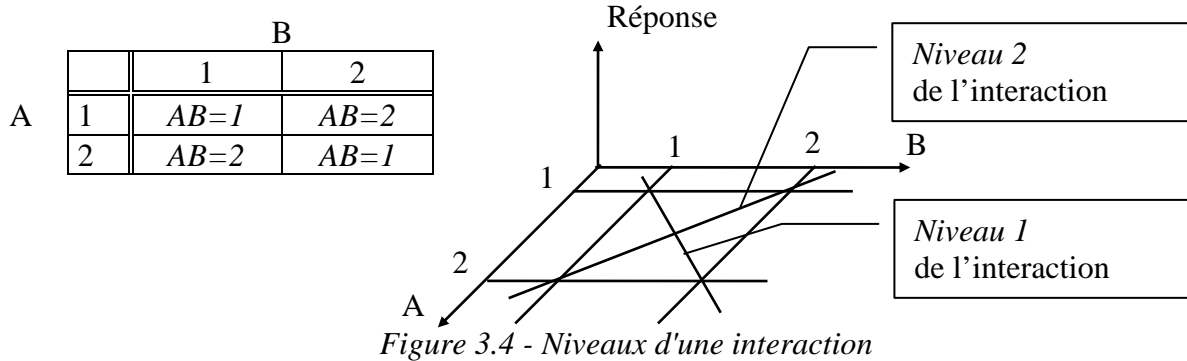
Supposons que nous souhaitons un modèle du type :

$$Y \sim M + [E_{A1} \ E_{A2}] A + [E_{B1} \ E_{B2}] B + [E_{C1} \ E_{C2}] C$$

Les facteurs sont à 2 niveaux, il n'y a pas d'interaction, le PPCM est donc égal à 4. Le nombre de ddl est également à 4, le plus petit plan qui convient est un plan à 4 essais. Comme le plan complet fait $2^3 = 8$ essais, il existe donc un plan fractionnaire pour étudier ce modèle.

Considérons le plan complet 2^3 (3 facteurs, 2 niveaux, 8 essais). En fonction des états de deux facteurs, nous pouvons déduire l'état de l'interaction entre ces deux facteurs. Par convention, l'interaction sera à 1 lorsque les facteurs seront placés au même niveau. Elle sera à 2 lorsque les facteurs seront à des niveaux opposés.

Nous avons vu en effet que $I_{A1B1} = I_{A2B2}$ (chapitre 2, paragraphe 1.8). Le tableau ci-dessous représente pour chaque essai, l'état des facteurs, ainsi que l'état des interactions entre chacun des facteurs.



Les colonnes d'interactions peuvent se calculer en appliquant les règles de multiplication suivantes :

$$\begin{aligned} (1) \times (1) &= (1) \\ (1) \times (2) &= (2) \\ (2) \times (1) &= (2) \\ (2) \times (2) &= (1) \end{aligned}$$

On retrouve ainsi l'état de chaque interaction pour les huit essais.

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

Pour obtenir un plan fractionnaire **orthogonal** de ce plan complet, il faut couper ce plan en deux parties. Pour cela, il suffit de ne conserver que les 1 ou les 2 d'une colonne que l'on choisit. Mais attention, cette colonne ne pourra évidemment plus être calculée. Elle restera à 1 ou à 2 sur l'ensemble du plan d'expériences.

On montre facilement qu'il existe $2^3 - 1 = 7$ manières de couper en deux parties (autant qu'il y a de colonnes).

Si nous négligeons les interactions du troisième ordre, nous pouvons couper le plan complet en ne prenant que les 1 de la colonne *ABC* et obtenir le plan fractionnaire suivant :

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
1	1	1	1	1	1	1	1
4	1	2	2	2	2	1	1
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1

En utilisant une autre colonne de la table, nous aurions obtenu un autre demi-plan.

On vérifie facilement que le demi-plan que nous venons d'écrire n'est autre que le plan $L_4(2^3)$ de Taguchi.

5.2. Notions d'alias

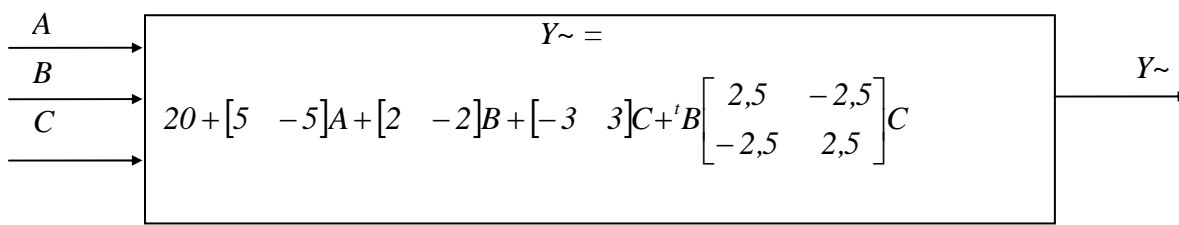
Considérons le demi-plan précédent obtenu en ne conservant que les I de la colonne ABC . Examinons les colonnes A et BC , les colonnes B et AC , ainsi que les colonnes C et AB . Ces colonnes sont deux à deux identiques. Nous appellerons A et BC , B et AC , C et AB des alias.

Que signifie un alias ?

Les actions A et BC sont des alias. Cela signifie que lorsqu'on calcule les actions de l'un, ces actions sont confondues avec les actions de l'autre. **En fait, on ne peut calculer que la somme des actions aliassées.** Dans le cas des actions A et BC , lorsqu'on calcule les effets de A , en fait, on calcule les effets de A **plus** les effets de l'interaction BC .

Nous venons de voir un des éléments-**clé** des plans d'expériences fractionnaires. Le demi-plan coûtera deux fois moins cher que le plan complet, **mais**, ce gain sera payé par des ambiguïtés dans l'estimation de certains effets d'actions que l'on appelle des **ALIAS**.

Pour illustrer cette notion particulièrement importante dans les plans d'expériences, nous allons supposer un système considéré comme une boîte noire dont le modèle est le suivant :



Supposons que nous souhaitions étudier ce système sans avoir retenu l'interaction BC supposée nulle par les experts. Le modèle que nous recherchons est alors :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C$$

Les règles de degré de liberté et d'orthogonalité nous conduisent à effectuer un plan d'expériences à quatre lignes pour identifier ce modèle. Nous retenons le plan fractionnaire que nous avons établi en 5.1. Les résultats des expériences seront soumis aux effets de A , B , C et de l'interaction BC .

Nous trouverions dans le cas où les résidus sont nuls :

N°	A	B	C	Y
1	1	1	1	26,5
2	1	2	2	28,5
3	2	1	2	17,5
4	2	2	1	7,5

Tableau des moyennes

	A	B	C
Niveau 1	27,5	22	17
Niveau 2	12,5	18	23

En calculant le modèle à partir de ces résultats, nous obtenons comme modèle :

$$Y_{\sim} = 20 + [7,5 \quad -7,5]A + [2 \quad -2]B + [-3 \quad 3]C$$

Supposons que nous recherchions un minimum.

Le minimum est obtenu pour la configuration suivante

	A	B	C
Niveau 1	2	2	1

La prédiction du modèle donne $20 - 7,5 - 2 - 3 = 7,5$.

Or, le 4^e essai du plan d'expériences donne justement cette configuration et le résultat est de 7,5.

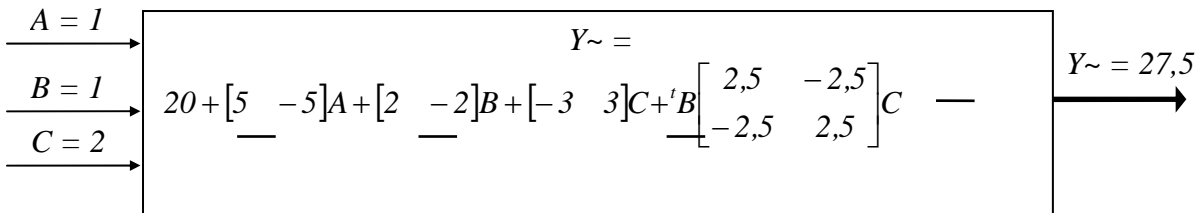
Mais attention, il ne faut jamais vérifier un modèle sur un des points qui a servi à établir le modèle. Il est indispensable de valider le modèle sur un des points du maillage **en dehors** des points testés dans le plan d'expériences.

Testons le point suivant (non présent dans les quatre essais du plan) :

	A	B	C
Niveau 1	1	1	2

La prédiction du modèle donne $20 + 7,5 + 2 + 3 = 32,5$.

L'essai donne le résultat suivant :



La différence entre l'essai de confirmation et la prévision est très importante. Le modèle obtenu ne peut pas être validé, il y a présence d'alias. L'essai de confirmation montre qu'une - au moins - des interactions supposées nulles au départ est en fait significative.

Conclusions

On note que par rapport au modèle réel du système (dans la boîte noire), nous avons fait une erreur sur l'effet du facteur A (7,5 au lieu de 5), mais nous avons trouvé les bons résultats sur les facteurs B et C. Établissons pour le plan fractionnaire, le tableau des alias.

Facteurs	Alias
M	ABC
A	BC
B	AC
C	AB

L'erreur sur le facteur A provient du fait que A est - dans ce plan d'expériences - "alias" avec l'interaction BC qui est ici non nulle. En fait, nous n'avons pas calculé l'effet de A , mais la somme :

$$E_A + I_{BC} (5 + 2,5 = 7,5).$$

Par contre, pour le facteur B qui était alias avec l'interaction AC - nulle dans cet exemple - nous avons calculé la somme $E_B + I_{AC} (2 + 0)$. Nous n'avons donc pas fait d'erreur dans le calcul du facteur B . Il en est de même pour le facteur C .

Si nous avons utilisé le plan fractionnaire obtenu en ne conservant que les 2 de la colonne ABC plutôt que les 1, nous aurions trouvé 2,5 comme effet de A car nous aurions calculé $E_A - I_{BC}$.

Comment lever le doute ?

Pour lever le doute sur les interactions non nulles, il aurait fallu réaliser le plan complet. Or dans notre cas, nous avons déjà réalisé les quatre essais du plan fractionnaire, plus l'essai de confirmation. Pour lever le doute, il suffit de réaliser les trois essais manquants. On dit que l'on "désaliasse" le plan d'expériences, c'est-à-dire que l'on sépare les effets des facteurs de ceux des interactions. On a le plan suivant :

N°	A	B	C	Y
1	1	1	1	26,5
2	1	1	2	27,5
3	1	2	1	17,5
4	1	2	2	28,5
5	2	1	1	16,5
6	2	1	2	17,5
7	2	2	1	7,5
8	2	2	2	18,5

Les essais complémentaires à réaliser sont en gras dans le plan d'expériences. Le tableau des moyennes donne :

	A	B	C
1	25	22	17
2	15	18	23

	B1	B2
A1	27	23
A2	17	13

	C1	C2
A1	22	28
A2	12	18

	C1	C2
B1	21,5	22,5
B2	12,5	23,5

On en déduit facilement le modèle

$$Y \sim 20 + [5 \quad -5]A + [2 \quad -2]B + [-3 \quad 3]C + B \begin{bmatrix} 2,5 & -2,5 \\ -2,5 & 2,5 \end{bmatrix} C$$

Celui-ci correspond évidemment au modèle contenu dans la boîte noire.

Comment utiliser un plan fractionnaire malgré la présence d'alias ?

A première vue, la présence des actions alias, semble rédhibitoire pour l'utilisation des plans fractionnaires puisqu'il y a toujours confusion des actions.

Cependant, il est extrêmement rare d'observer un système pour lequel les interactions d'ordre supérieur à 2 soient significatives. Les interactions de type BCD étant considérées comme nulles, nous considérerons que si l'action A et l'action BCD sont alias, nous observerons avec une bonne précision l'action A .

Dans le cas où la présence d'interactions fortes non soupçonnées au départ perturbe les résultats, il est souvent possible, comme dans le petit exemple précédent, de "désaliaser" un plan d'expériences en réalisant un plan complémentaire.

Cependant, cette notion de confusion des actions est une notion fondamentale qu'il faut garder à l'esprit lorsqu'on utilise des plans fractionnaires. On verra, au chapitre 4, les plans de Taguchi qui simplifient grandement la tâche de choix de plans fractionnaires évitant d'avoir des actions significatives aliassées.

5.3. Notion de résolution

On appelle action d'ordre I les facteurs (A, B, \dots), actions d'ordre II les interactions de type AB, AC, \dots et action d'ordre III les interactions de type ABC, ACD, \dots

Dans le plan fractionnaire que nous avons étudié au paragraphe 5.2. un facteur (action d'ordre I) est alias avec une interaction de type BC (action d'ordre II). Dans ce cas de figure, nous dirons que le plan est de résolution III ($I + II$). Ce type de plan est très risqué car si une interaction supposée nulle au départ n'est en fait pas nulle, elle s'ajoute à l'effet d'un facteur.

Les plans de résolution IV sont plus intéressants. Les facteurs (ordre I) sont alias avec des actions d'ordre III ($I + III = IV$). Par contre, les actions d'ordre II seront alias avec d'autres actions d'ordre II ($II + II = IV$). Ces plans sont très intéressants car, comme les actions d'ordre III sont souvent insignifiantes, les facteurs principaux seront déterminés sans ambiguïté.

Les plans de résolution V sont idéals, mais souvent peu fractionnaires donc coûteux à réaliser. Les facteurs (ordre I) sont alias avec des actions d'ordre IV ($I + IV = V$). Les actions d'ordre II seront alias avec d'autres interactions d'ordre III ($II + III = V$). Ces plans permettent de déterminer sans ambiguïté tous les facteurs principaux et toutes les interactions de second ordre.

5.4. Règle de détermination des alias

Si nous reprenons le plan complet étudié au paragraphe 5.1. nous avons coupé le plan complet en utilisant la colonne ABC . Une règle pratique nous permet de déterminer directement les alias.

Règle de détermination

Pour déterminer l'alias d'une action, on multiplie modulo 2 cette action par la colonne qui a servi à faire la coupure.

Exemple Action A
Coupure ABC

Multiplication modulo 2 : $A \cdot ABC = A^2BC = BC$

Nous obtenons ainsi le tableau des alias suivant :

	Actions	Colonne de coupure	Alias
Moyenne	M	ABC	ABC
Facteurs	A	ABC	BC
	B	ABC	AC
	C	ABC	AB
Interactions	AB	ABC	C
	AC	ABC	B
	BC	ABC	A

L'alias de la moyenne est donc l'interaction ABC . De même l'alias de l'action A est l'action BC .

6. Calcul d'un plan fractionnaire 2^{n-p}

6.1. Problème

Nous recherchons un plan fractionnaire capable de déterminer les coefficients du modèle suivant :

$$Y \sim = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$$

Chaque facteur est à 2 niveaux. Toutes les interactions non présentes dans le modèle sont supposées négligeables.

6.2. Recherche des plans possibles

Plan complet correspondant

Le plan **complet** correspondant à ce modèle comportera $2^4 = 16$ essais.

Règle des degrés de liberté

Modèle	$Y \sim = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$
ddl	$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 8$

Le nombre d'expériences devra donc être supérieur ou égal à 8.

Règle d'orthogonalité : tous les facteurs sont à 2 niveaux, pas d'interaction disjointe, PPCM = 8 (voir figure 3.3 - paragraphe 3.3.).

Le plus petit plan est donc un plan à 8 essais.

6.3. Plan fractionnaire correspondant

Le plan complet comporte 16 essais. Nous allons donc rechercher un des 15 demi-plans orthogonaux qu'on peut tirer du plan complet et qui ne comporte pas de confusion entre les actions supposées non nulles du modèle.

Les colonnes d'interactions peuvent se calculer en appliquant les règles de multiplication suivantes :

$$(1) \times (1) = (1) \quad (1) \times (2) = (2) \quad (2) \times (1) = (2) \quad (2) \times (2) = (1)$$

Plan complet

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
02	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
03	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
04	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
05	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
06	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
07	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
08	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
09	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

Nous allons couper ce plan en deux parties en ne conservant que les 1 de la colonne *ABCD* soient les numéros 1, 4, 6, 7, 10, 11, 13, 16.

N°	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	D	AD	BD	ABD	CD	ACD	BCD	ABCD
01	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
04	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
06	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
07	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

Détermination des alias des actions du modèle

	Actions	Colonne de coupure	Alias
Moyenne	M	ABCD	ABCD
Facteurs	A	ABCD	BCD
	B	ABCD	ACD
	C	ABCD	ABD
	D	ABCD	ABC
Interactions	AB	ABCD	CD
	AC	ABCD	BD
	BC	ABCD	AD

Nous remarquons qu'aucune des actions présentes dans le modèle, n'est alias d'une autre action. En effet, les interactions d'ordre 3 et plus (*BCD*, *ACD*.. , *ABCD*) sont supposées nulles, et les

interactions avec le facteur D étaient supposées inexistantes. Le plan retenu de résolution IV sera donc le suivant :

N°	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	1	2	2
3	1	2	1	2
4	1	2	2	1
5	2	1	1	2
6	2	1	2	1
7	2	2	1	1
8	2	2	2	2

Nous verrons, dans le chapitre suivant, une méthode beaucoup plus rapide que celle-ci pour trouver les plans fractionnaires orthogonaux tels que les alias ne perturbent pas les résultats.

Nous retrouverons très rapidement ce plan d'expériences qui correspond aux colonnes 1, 2, 4 et 7 de la table $L_8(2^7)$ de Taguchi.

Chapitre 4

Plans fractionnaires, méthode de Taguchi

1. L'apport de Taguchi aux plans d'expériences

Genichi Taguchi a travaillé dans le domaine de la qualité, il a notamment mis au point une méthode connue sous le nom de "méthode Taguchi" qui permet de maîtriser la qualité dès la conception des produits. Dans cet ouvrage, nous abordons principalement la partie "plans d'expériences" de l'apport de Taguchi.

Comme nous l'avons vu au chapitre précédent, l'utilisation de plans fractionnaires permet de diminuer considérablement le nombre d'essais à réaliser pour identifier les coefficients d'un modèle. Cependant, ce gain n'est pas sans conséquence. Dans le cas des plans fractionnaires, il y a confusion entre certaines actions, que l'on appelle alors des ALIAS.

La mise au point de plans fractionnaires adaptés à un modèle est une procédure assez fastidieuse et parfois assez complexe. Le docteur Genichi Taguchi a mis au point une méthode originale permettant, à partir de quelques tables standard, de résoudre facilement la plupart des problèmes industriels en matière de plans d'expériences.

Les tables standard de Taguchi considèrent que les interactions d'ordre 2, c'est-à-dire les interactions entre deux facteurs sont négligeables sauf quelques-unes parfaitement identifiées. Les interactions d'ordre 2 non considérées seront donc supposées comme nulles. Les interactions d'ordre supérieur à 2 seront toujours considérées comme négligeables.

2. Graphes linéaires associés à un modèle

2.1. Représentation des facteurs

La méthode Taguchi est fondée sur une représentation graphique du modèle que l'on souhaite identifier. Dans cette représentation, les facteurs sont représentés par des ronds (\bigcirc).

Lorsqu'on réalise une expérience, tous les facteurs ne sont pas aussi faciles à modifier. Certains ne nécessitent que la rotation d'un potentiomètre, alors que d'autres nécessitent une vidange complète de la machine. Il est évident que le premier type de facteur pourra être modifié à chaque expérience, par contre, le deuxième facteur ne devra être modifié qu'une seule fois si possible dans le plan.

Pour répondre à cette préoccupation, Taguchi distingue parmi les facteurs, quatre groupes qui seront représentés de façons différentes.

- Le groupe 1 sera le groupe des facteurs les plus difficiles à modifier. Ils seront notés par un cercle \bigcirc .
- Le groupe 2 sera un peu plus facile à modifier. Il sera noté par deux cercles concentriques \odot .
- Le groupe 3 sera encore un peu plus facile. Il sera noté par un cercle entourant un rond noir \bullet .
- Le groupe 4 sera constitué des facteurs les plus faciles à modifier, ils seront notés par un rond noir \bullet .

2.2. Représentation des interactions

Les interactions entre deux facteurs seront représentées par un trait entre deux facteurs. Ainsi, si on souhaite représenter une interaction entre un facteur A du groupe 1 et un facteur B du groupe 4, nous dessinerons :



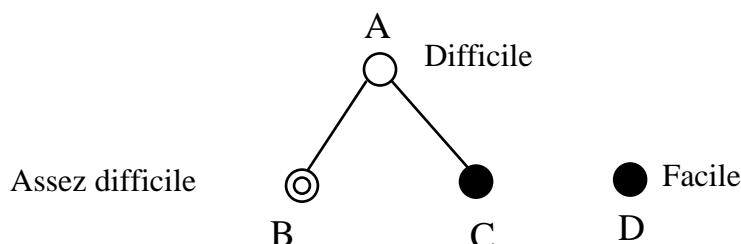
2.3. Représentation d'un modèle

En appliquant les règles que nous avons vues précédemment, il devient facile de représenter sous forme d'un graphe linéaire un modèle.

Exemple 1

$$Y \sim M + A + B + C + D + AB + AC$$

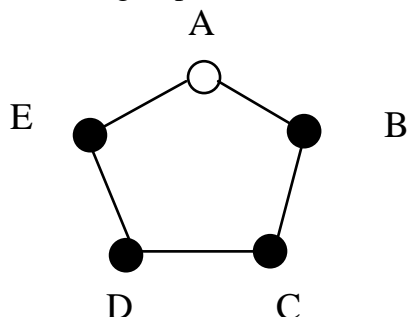
Le facteur A étant du groupe 1, B du groupe 2, C et D du groupe 4, nous représenterons ce modèle avec le graphe linéaire suivant :



Exemple 2

$$Y \sim = M + A + B + C + D + E + AB + BC + CD + DE + EA$$

A est du groupe 1 et les autres facteurs du groupe 4.



3. Les tables orthogonales de Taguchi

3.1. Présentation proposée par Taguchi

Les tables orthogonales de Taguchi se présentent sous la forme d'une table orthogonale correspondant au plan d'expériences. Celle-ci peut être suivie éventuellement d'un ou plusieurs graphes linéaires et d'un triangle des interactions (sous forme d'un tableau triangulaire).

Examinons à titre d'exemple la table $L_8 (2^7)$.

Rappelons que L_8 signifie que cette table comporte 8 lignes, c'est-à-dire 8 expériences. 2^7 signifie que cette table est tirée d'un plan complet de 7 facteurs à 2 niveaux. Il est donc évident que cette table ne pourra être utilisée pour étudier plus de 7 facteurs, ceux-ci étant à deux niveaux.

Table orthogonale

N°	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
<i>Groupes</i>	<i>1</i>	<i>2</i>	<i>2</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>3</i>	<i>3</i>

Figure 4.1 - Table $L_8 2^7$

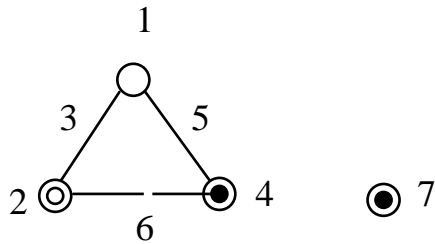
On remarque que la colonne 1 est du groupe 1, le niveau ne change qu'une fois dans la table. Les colonnes 2 et 3 changent de niveaux respectivement 3 et 2 fois. Les colonnes suivantes changent pratiquement à chaque essai.

En l'absence d'interaction, on peut utiliser cette table pour un modèle de 7 facteurs à 2 niveaux. Pour cela, il suffit d'affecter à chaque colonne 1..7 un facteur en fonction du groupe auquel il appartient.

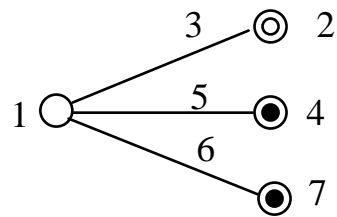
Graphe linéaire de la table L_8

Deux graphes linéaires accompagnent la table L_8 .

Premier graphe



Deuxième graphe



Ces deux graphes indiquent, sous forme graphique, les modèles que l'on peut étudier à partir de la table $L_8(2^7)$.

Ainsi, le premier graphe indique que l'on peut étudier le modèle suivant :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + BC + AC$$

à condition de placer :

- le facteur A en colonne 1,
- le facteur B en colonne 2,
- le facteur C en colonne 4,
- le facteur D en colonne 7,
- les interactions entre A et B seront en colonne 3, entre B et C en colonne 6, et entre A et C en colonne 5.

Le fait de savoir que l'interaction entre A et B se trouve dans la colonne 3, nous permet de ne pas placer de facteur dans cette colonne, sinon, ce facteur serait un ALIAS de l'interaction AB que nous estimons ne pas être négligeables.

Bien évidemment, nous pourrions, avec le même graphe, étudier un sous-ensemble de ce modèle. Nous pourrions, par exemple, étudier le modèle :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + BC$$

en plaçant les facteurs de la même façon que précédemment.

Le deuxième graphe correspond à un modèle du type :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + AB + AC + AD$$

ou à un sous-ensemble de ce modèle, à condition de placer :

- le facteur A en colonne 1,
- le facteur B en colonne 2,
- le facteur C en colonne 4,
- le facteur D en colonne 7.

Triangle des interactions

Le triangle des interactions de la table L_8 est le suivant :

	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
(2)		1	6	7	4	5
		(3)	7	6	5	4
			(4)	1	2	3
				(5)	3	2
					(6)	1

Ce triangle est extrêmement intéressant car il indique quelle sera la colonne qui sera ALIAS des interactions.

Ainsi, on peut reconstruire le premier graphe linéaire que nous avons étudié ci-dessus.

Supposons que nous ayons placé :

- le facteur A en colonne 1,
- le facteur B en colonne 2,
- le facteur C en colonne 4,
- le facteur D en colonne 7.

Pour savoir dans quelle colonne se situe l'interaction AB , il suffit de lire le chiffre situé à l'intersection entre la ligne (1) et la colonne 2, soit 3.

De même, la colonne dans laquelle se situe l'intersection entre B et C est à l'intersection entre la ligne (2) et la colonne 4, soit 6. On ferait de même pour l'intersection AC (1 et 4) pour trouver la colonne 5.

Détermination du tableau des alias

A partir du triangle des interactions, il est facile de déterminer le tableau des alias.

Facteurs	Colonnes	Alias
A	1	- (BCD)
B	2	- (ACD)
C	4	- (ABD)
D	7	- (ABC)
AB	3	CD
AC	5	BD
BC	6	AD

On remarque que les facteurs principaux (actions d'ordre I) sont alias avec des interactions d'ordre III et que les interactions d'ordre II sont alias avec des interactions d'ordre II . On dit que le plan est de résolution IV .

Le tableau des interactions permet également de rechercher d'autres plans d'expériences non prévus dans les graphes linéaires de Taguchi mais nous traiterons ces cas dans le chapitre 8.

4. Construction d'un plan à partir des tables de Taguchi

4.1. Définition du modèle

Comme dans le cas des plans fractionnaires classiques, il faut, avant de choisir un plan d'expériences, avoir analysé le problème et défini le modèle qu'on cherche à identifier.

Le modèle dépend du nombre de facteurs du système et des interactions du second ordre que l'on suppose non négligeables.

Exemple

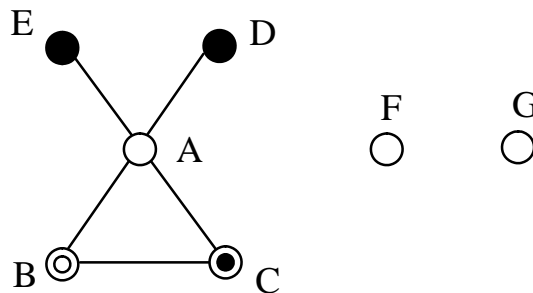
Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Niveaux	2	2	2	2	2	2	2
Groupe	1	2	3	4	4	4	4

Les interactions supposées non négligeables sont les suivantes : AB, AC, BC, AD, AE .

Le modèle s'écrit donc : $Y \sim = M + A + B + C + D + E + F + G + AB + AC + BC + AD + AE$

4.2. Etablissement du graphe linéaire du modèle

Avec les règles de représentation que nous avons fixées au paragraphe 2, nous pouvons établir le graphe du modèle qui est le suivant :



4.3. Recherche de la table de Taguchi adaptée

Les facteurs étant tous des facteurs à 2 niveaux, nous rechercherons le plan à partir des tables $L_4(2^3), L_8(2^7), L_{16}(2^{15}), L_{32}(2^{31})$.

Pour trouver la table adaptée au modèle, nous utiliserons la méthode définie au chapitre 3 paragraphe 3.3.

Critère du nombre de degrés de liberté

$$Y \sim = M + A + B + C + D + E + F + G + AB + AC + BC + AD + AE$$

$$ddl \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1$$

Le nombre de degrés de liberté du modèle est de 13, le nombre d'expériences devra être supérieur ou égal à 13.

Critère d'orthogonalité

Le modèle comporte des interactions disjointes, le PPCM est donc de 16. Nous rechercherons donc le plan dans la plus petite table compatible avec ces deux critères, soit la table L_{16} .

Dans le cas des plans d'expériences à deux niveaux, on pourra utilement se reporter au tableau de choix d'un plan d'expériences que l'on trouvera en annexe (résumé 3, page 321). Ce tableau donne pour un nombre de facteur donné, l'ensemble des plans disponibles, et le risque associé à chaque plan. Ainsi, pour notre cas, il y a 7 facteurs, la solution préconisée est d'utiliser un plan de résolution IV à partir des colonnes impaires de la table L_{16} . Nous reviendrons dans ce chapitre en détail sur les raisons de ce choix.

4.4. Affectation de colonne à chaque coefficient

Pour affecter une colonne à chaque facteur, il faut trouver un graphe linéaire proposé par Taguchi qui se superpose au graphe linéaire du modèle qu'on veut identifier.

Pour la table L_{16} l'ASI (American Supplier Institute) a publié 18 graphes linéaires. Nous devons donc rechercher parmi ceux-ci un graphe qui conviendrait à notre problème. Considérons le graphe suivant et comparons-le à celui de notre modèle.

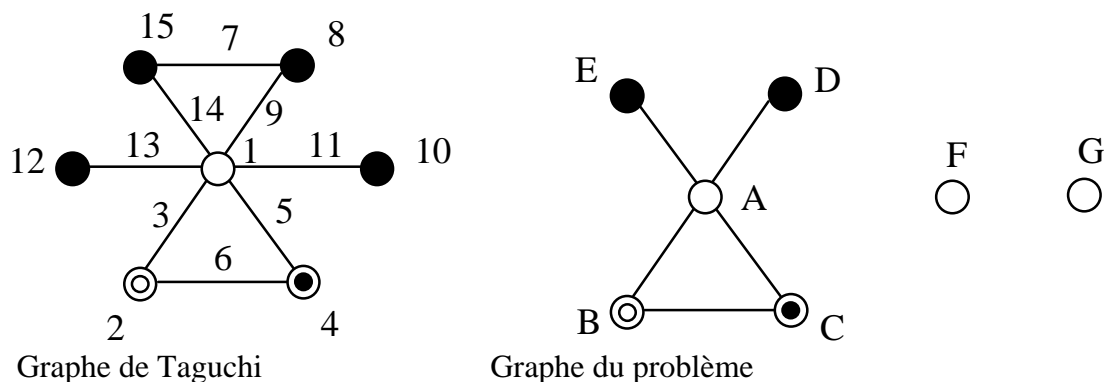


Figure 4.2 - Graphes du problème et de Taguchi

On constate que le graphe du modèle est un sous-ensemble du graphe de Taguchi, nous pouvons donc l'utiliser pour affecter les colonnes à chaque coefficient.

Nous trouvons :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Colonnes	1	2	4	8	15	10	12

Dans la pratique, il n'est pas toujours aussi facile de faire coïncider les ronds vides ou pleins. Lorsque des facteurs difficiles à modifier sont placés dans des colonnes qui comportent de nombreux changements de niveaux, il est toujours possible de diminuer ce nombre de changements en modifiant l'ordre des essais. En effet, l'ordre dans lequel les essais sont réalisés n'a pas d'importance.

Cependant s'il est possible de faire coïncider ronds blancs avec ronds blancs, l'ordre de la table de Taguchi est directement l'optimum.

Remarque importante :

Nous verrons un peu plus loin que la plupart des graphes proposés par Taguchi correspondent à des plans de résolution *III*. Ainsi, le plan que nous venons de construire n'est pas le plan optimum en terme de risques. Tant que le nombre de facteurs est inférieur à 8, il sera préférable d'utiliser d'autres graphes que nous proposons en annexes de cet ouvrage qui correspondent à des plans d'expériences de résolution *IV*. Ainsi, aucun facteur ne sera alias avec une interaction de second ordre.

Supposons néanmoins qu'on utilise le plan que nous venons de bâtir. Le plan d'expériences s'écrit facilement en recopiant les colonnes de la table L_{16} :

Colonnes Facteurs	01 A	02 B	04 C	08 D	15 E	10 F	12 G	Y
01	1	1	1	1	1	1	1	35,6
02	1	1	1	2	2	2	2	30,4
03	1	1	2	1	2	1	2	33,5
04	1	1	2	2	1	2	1	39,5
05	1	2	1	1	2	2	1	12,6
06	1	2	1	2	1	1	2	34,5
07	1	2	2	1	1	2	2	26,5
08	1	2	2	2	2	1	1	36,4
09	2	1	1	1	2	1	1	33,5
10	2	1	1	2	1	2	2	23,4
11	2	1	2	1	1	1	2	35,6
12	2	1	2	2	2	2	1	21,5
13	2	2	1	1	1	2	1	26,6
14	2	2	1	2	2	1	2	20,4
15	2	2	2	1	2	2	2	28,4
16	2	2	2	2	1	1	1	34,5

Y représente le résultat de l'expérience lors des essais.

Nous verrons au paragraphe 6.4. une autre solution pour construire ce plan d'expériences qui présentera moins de risques pour l'expérimentateur.

5. Expérimentation et interprétation

L'ordre dans lequel les expérimentations sont effectuées n'a aucune importance sur le résultat. Cependant, une modification de l'ordre des essais rend caduque la classification en facteurs de premier, deuxième, troisième ou quatrième groupe que nous avons réalisée en fonction de la difficulté de modification des niveaux.

5.1. Notions d'aléarisation

Lors des essais, l'expérimentateur n'est jamais certain que les seuls facteurs influents sont les facteurs contrôlés durant les essais. D'autres facteurs peuvent influencer comme le lot d'origine des pièces utilisées pour réaliser les essais.

Supposons que les huit premiers essais (facteur A à 1) aient été réalisés avec un lot et les huit derniers (facteur A à 2) avec un autre lot. Dans ce cas, l'influence du lot serait confondue avec l'effet du facteur A.

Pour éviter ce type d'erreur, il faut **aléariser** les facteurs non contrôlés que l'on suppose influents. Dans le cas décrit ci-dessus, il faut rendre aléatoire (aléariser) le lot d'origine des pièces. On tirera donc au hasard les pièces, parmi les deux lots, pour réaliser chaque expérience.

Cette précaution étant prise, l'influence du lot de pièces ne sera plus confondue avec un effet de facteur, mais, se retrouvera dans les résidus. S'il est impossible d'aléariser, il faut alors utiliser la technique des blocs qui sera développée au paragraphe 11 de ce chapitre.

5.2. Calcul des coefficients du modèle

Le calcul des coefficients du modèle ne pose aucun problème, nous utilisons les formules générales de calcul que nous avons définies au chapitre 2.

Formules de calcul

Soit Y la réponse du modèle, et M la moyenne générale

Effet moyen de A au niveau i

$$E_{Ai} = (\text{Moyenne des } Y \text{ lorsque } A \text{ est au niveau } i) - M$$

Interaction de A au niveau i et B au niveau j

$$I_{AiBj} = (\text{Moyenne des } Y \text{ lorsque } A \text{ au niveau } i \text{ et } B \text{ au niveau } j) - E_{Ai} - E_{Bj} - M$$

Application numérique sur l'exemple précédent

La moyenne générale des résultats Y est $M = 29,56$.

Tableau des moyennes

	A	B	C	D	E	F	G
1	31,13	31,625	27,125	29,037	32,025	33	30,025
2	27,99	27,487	31,987	30,075	27,087	26,112	29,087

Calcul des effets moyens

En appliquant la formule de calcul des effets moyens, on trouve le tableau des effets suivants :

$$= 31,13 - 29,56$$

	A	B	C	D	E	F	G
E ₁	1,57	2,07	-2,43	-0,52	2,47	3,44	0,47
E ₂	-1,57	-2,07	2,43	0,52	-2,47	-3,44	-0,47

Graphique des effets moyens

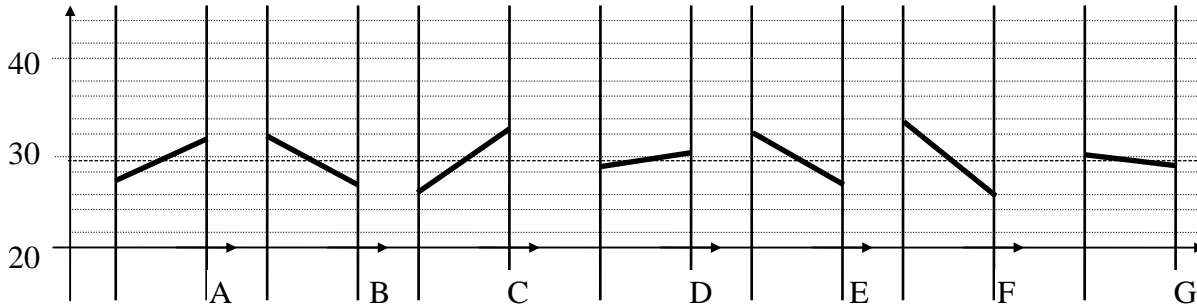


Tableau des moyennes pour les interactions retenues

Moyenne des essais lorsque A = 1 et B = 1 (essais 1, 2, 3, 4)

AB	B=1	B=2
A=1	34,75	27,5
A=2	28,5	27,5

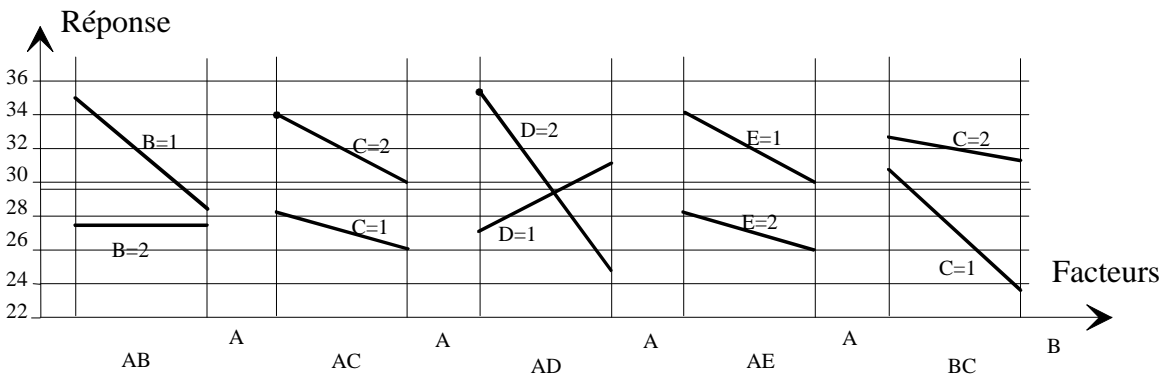
AC	C=1	C=2
A=1	28,3	34,0
A=2	26,0	30,0

BC	C=1	C=2
B=1	30,7	32,5
B=2	23,5	31,45

AE	E=1	E=2
A=1	34,0	28,20
A=2	30,0	25,95

AD	D=1	D=2
A=1	27,05	35,2
A=2	31,0	24,95

Graphe des interactions



Calcul des interactions

En appliquant la formule générale de calcul des interactions, on trouve pour I_{AID1} :

$$I_{AID1} = (Y1 + Y3 + Y5 + Y7)/4 - E_{A1} - E_{D1} - M$$

$$I_{AID1} = 27,05 - 1,57 + 0,52 - 29,56 = -3,56$$

On en déduit les autres composantes de l'interaction AD

$I_{A1D1} = -3,56$	$I_{A1D2} = +3,56$
$I_{A2D1} = +3,56$	$I_{A2D2} = -3,56$

Remarque : l'interaction AD se retrouve dans la colonne 9 (voir le graphe du modèle). On peut donc trouver l'interaction I_{A1D1} en calculant l'effet au niveau 1 de la colonne 9. On trouverait :

$$E9_1 = Y1 + Y3 + Y5 + Y7 + Y10 + Y12 + Y14 + Y16 - \text{moyenne}$$

$$E9_1 = 26 - 29,56 = -3,56 = I_{A1D1}$$

Les autres interactions sont calculées de la même façon, on trouverait :

$$I_{A1B1} = +1,55 \quad I_{A1C1} = -0,42 \quad I_{B1C1} = +1,53$$

$$I_{A1D1} = -3,56 \quad I_{A1E1} = +0,43$$

Le modèle s'écrit donc de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
 Y_{\sim} = & 29,56 \\
 & + [1,57 \quad -1,57] A \quad + \quad [2,07 \quad -2,07] B \\
 & + [-2,43 \quad 2,43] C \quad + \quad [-0,52 \quad 0,52] D \\
 & + [2,47 \quad -2,47] E \quad + \quad [3,44 \quad -3,44] F \\
 & + [0,47 \quad -0,47] G \\
 & {}^t A \begin{bmatrix} 1,55 & -1,55 \\ -1,55 & 1,55 \end{bmatrix} B \quad + \quad {}^t A \begin{bmatrix} -0,42 & 0,42 \\ 0,42 & -0,42 \end{bmatrix} C \\
 & {}^t A \begin{bmatrix} -3,56 & 3,56 \\ 3,56 & -3,56 \end{bmatrix} D \quad + \quad {}^t B \begin{bmatrix} 1,53 & -1,53 \\ -1,53 & 1,53 \end{bmatrix} C \\
 & {}^t A \begin{bmatrix} 0,43 & -0,43 \\ -0,43 & 0,43 \end{bmatrix} E
 \end{aligned}$$

5.3. Interprétation du modèle

Le modèle ci-dessus représente un modèle du comportement du système aux nœuds du maillage choisi par l'expérimentateur. Supposons que dans le cas de l'exemple ci-dessus, l'optimum soit un minimum. Dans ce cas, il faut placer les facteurs de telle sorte qu'il minimise la réponse du système.

Les graphes des effets sont faciles à interpréter. L'effet de F est beaucoup plus important que l'effet de G par exemple. De même, l'interaction AD est très importante alors que l'interaction AC est faible (les droites sont presque parallèles).

Premier cas, on ne considère que les actions de premier ordre

Dans ce cas, cela revient à ne pas considérer les graphes des interactions. L'interprétation est simple, il suffit de prendre les points les plus bas des graphes des effets. Le minimum sera obtenu lorsque :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Niveaux	2	2	1	1	2	2	2

Deuxième cas, on considère les interactions

Dans ce cas, il peut exister des incompatibilités avec les résultats trouvés précédemment. L'interaction compense alors les effets des facteurs. C'est notamment le cas de l'interaction *AD* qui minimise la réponse lorsque $A=2$ et $D=2$, alors qu'en ne considérant que les effets principaux nous avons placé *D* au niveau 1. Dans d'autres cas, les interactions amplifieront les effets des facteurs simples, c'est le meilleur des cas dans notre exemple. Cette situation se rencontre dans le cas de l'interaction *BC* qui minimise la réponse lorsque *B* et *C* sont à des niveaux opposés, ce qui est le cas de la première optimisation.

Pour trouver le minimum, il faut faire une optimisation globale en s'appuyant sur les graphes des effets et des interactions et sur le modèle matriciel. Dans notre exemple, l'optimum donné par les graphes (points les plus bas).

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Niveaux	2	2	1	2	2	2	2

La réponse théorique est alors de 14,94.

En fait, l'étude du modèle matriciel nous donne l'optimum global car la somme des interactions faisant intervenir *A* est plus forte que l'effet principal de *A*. Le minimum est ainsi obtenu pour la configuration suivante :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Niveaux	1	2	1	1	2	2	2

La réponse théorique est alors de 12,24.

Lorsqu'on regarde le plan d'expériences, on s'aperçoit que cette configuration des facteurs n'a pas été testée dans celui-ci. Il est donc **indispensable de faire un essai de confirmation** pour vérifier si la réponse mesurée vérifie l'hypothèse de la réponse théorique.

6. Les alias dans les plans de Taguchi

6.1. Utilisation du triangle des interactions

Pour étudier les alias dans les tables de Taguchi, nous allons nous appuyer sur la table L_8 que nous rappelons ci-dessous avec son triangle des interactions.

Table de Taguchi L_8 :

N°	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
Groupes	1	2	2	3	3	3	3

Triangle des interactions correspondant :

	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
	(2)	1	6	7	4	5
		(3)	7	6	5	4
			(4)	1	2	3
				(5)	3	2
					(6)	1

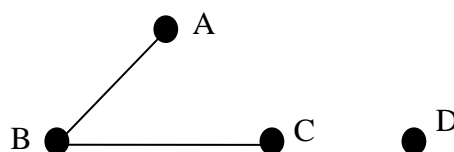
Nous avons vu au paragraphe 3.1. que le triangle des interactions indique dans quelle colonne se trouvent les interactions entre deux facteurs placés chacun dans une colonne. Ainsi, si on place un facteur A dans la colonne 2 et un facteur B dans la colonne 4, l'interaction AB se trouvera dans la colonne 6. On trouve 6 à l'intersection entre la ligne n°2 et la colonne n°4 dans le triangle des interactions.

Supposons que l'on ait placé un facteur C dans la colonne 6, le facteur C serait alias avec l'interaction AB . En d'autres termes, lorsqu'on calcule l'effet du facteur C , en fait, on calcule l'effet du facteur C **plus** l'effet de l'interaction AB . Il n'est pas possible avec les résultats du plan de dissocier les alias, c'est-à-dire de dissocier l'effet du facteur C et de l'interaction AB .

6.2. Application

Considérons un plan d'expériences orthogonal vis-à-vis du modèle suivant :

$Y \sim M + A + B + C + D + AB + BC$, les facteurs étant tous à deux niveaux. On construit rapidement le plan d'expériences grâce aux graphes linéaires.



En comparant avec le graphe 1 de la table L_8 on trouve :

Facteurs	A	B	C	D
Colonne retenue	1	2	4	7

Le premier graphe linéaire (paragraphe 3.1.), ou le triangle des interactions, nous indique que l'interaction AB sera en colonne 3 et que l'interaction BC sera en colonne 6.

Toutes les interactions non écrites dans le modèle sont supposées nulles. Supposons qu'en réalité, il existe une interaction entre les facteurs C et D . Dans ce cas, quelle erreur commettons-nous et comment nous en apercevons-nous ?

En regardant le triangle des interactions, on constate que l'interaction entre les colonnes 4 et 7 se retrouve dans la colonne 3 comme l'interaction AB . Il y aura donc confusion dans l'interprétation entre l'interaction AB et l'interaction CD . Les deux interactions sont alias. On peut établir le tableau des alias en utilisant le triangle des interactions. En règle générale, l'hypothèse que les interactions de troisième ordre - c'est-à-dire de type ABC - sont nulles est une hypothèse réaliste. On recherchera donc les alias uniquement sur les interactions de second ordre.

Lorsqu'il reste quelques incertitudes sur la présence éventuelle d'interaction, on recherchera le plus possible à déterminer sans ambiguïté les effets des facteurs. On préférera donc un plan pour lequel les effets de premier ordre (de type A) n'ont pas d'alias de second ordre (de type BC). C'est le cas du plan précédent comme le montre le tableau des alias ci-dessous. On appelle ce type de plan des plans de résolution IV .

Tableau de recherche des interactions

Dans ce tableau, établi à partir du triangle des interactions, nous avons relevé les colonnes dans lesquelles se trouvent toutes les interactions, y compris les interactions supposées nulles.

AB	3	AC	5	AD	6
BC	6	BD	5		
CD	3				

Le tableau des alias ci-dessous fait apparaître les confusions d'actions du plan d'expériences sur les effets du premier et du second ordre.

Action du modèle	Colonne	Alias
A	1	-
B	2	-
C	4	-
D	7	-
AB	3	CD
BC	6	AD

Dans ce cas de figure, les facteurs sont alias avec des interactions de troisième ordre, et les interactions d'ordre II sont alias entre elles (résolution IV). Lorsque le nombre de facteurs augmente, il n'est plus possible de respecter la condition précédente. Ainsi le plan que nous avons établi au paragraphe 4 comportait de très nombreux alias comme le montre le tableau suivant.

Modèle recherché

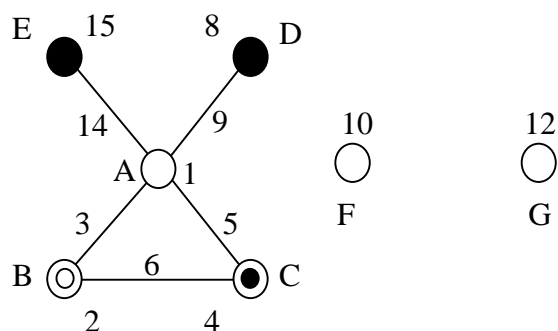


Tableau de recherche des interactions

Le tableau a été établi à partir du triangle des interactions de la table L₁₆.

AB	3	AC	5	AD	9	AE	14	AF	11	AG	13
BC	6	BD	<u>10</u>	BE	13	BF	<u>8</u>	BG	<u>14</u>		
CD	<u>12</u>	CE	11	CF	<u>14</u>	CG	<u>8</u>				
DE	7	DF	<u>2</u>	DG	<u>4</u>						
EF	<u>5</u>	EG	<u>3</u>								
FG	<u>6</u>										

Tableau d'alias

Action du modèle	Colonne	Alias
A	1	
B	2	DF
C	4	DG
D	8	BF+CG
E	15	
F	10	BD
G	12	CD
AB	3	EG
AC	5	EF
BC	6	FG
AD	9	
AE	14	CF+BG

Dans ce plan d'expériences, seuls les effets de *A*, de *E* et de *AD* ne seront alias d'aucune action d'un ordre inférieur au troisième. Le facteur *D* sera même alias de deux interactions de second ordre.

6.3. Comment s'apercevoir qu'il y a confusion des actions ?

Précisons d'abord qu'une bonne préparation du plan avec les spécialistes du système étudié évite ce type de déconvenue. Mais il peut subsister des cas où il y a confusion des actions. En effet, même les spécialistes d'un domaine ont bien du mal parfois à identifier *a priori* les interactions significatives. Après quelques plans d'expériences dans le domaine étudié, les interactions commencent par être mieux appréhendées et il devient plus facile de faire des hypothèses sur celles-ci. Pour un premier plan d'expériences dans une entreprise, il n'est pas conseillé de réaliser un plan

aussi fractionné que celui que nous avons présenté au paragraphe 4. Le tableau des alias que nous venons de présenter est significatif à ce sujet !

Le moyen le plus efficace pour découvrir ce type de situation reste l'essai de vérification du modèle **à un point non mesuré dans le plan**. Nous conseillons de réaliser le point de vérification dans la même campagne d'essais que la réalisation du plan d'expériences. En effet, lorsque le point de confirmation est réalisé une semaine après le plan d'expériences, il est toujours difficile de savoir si l'écart provient d'interactions non nulles, ou si les conditions d'essais ont changé entre temps.

6.4. Les plans de résolutions IV

Nous avons vu au chapitre 3, paragraphe 5.3. la notion de résolution. On a un plan de résolution *III* lorsque les facteurs (ordre *I*) sont alias avec les interactions d'ordre *II* (de type *AB*). C'est le cas du plan que nous avons réalisé au paragraphe 4. On a remarqué que ce type de plan comportait des risques importants d'erreur liés aux alias.

Dans un plan de résolution *IV*, les facteurs (ordre *I*) sont alias avec les interactions d'ordre *III* (de type *ABC*). Les interactions d'ordre *II* sont alias avec d'autres interactions d'ordre *II*. Ainsi, on peut considérer que dans un plan de résolution *IV*, chaque facteur est déterminé sans ambiguïté (avec l'hypothèse que les interactions d'ordre *III* sont insignifiantes).

Dans les graphes de Taguchi qui accompagne la table L_{16} , seul le graphe *I* est de résolution *V*, tous les autres graphes sont de résolution *III*. Pour choisir des plans comportant des risques minimums, nous avons créé de nouveaux graphes, ressemblant aux graphes de Taguchi mais qui ont une résolution d'ordre *IV* si on place les facteurs sur les colonnes des sommets des graphes.

Le tableau ci-dessous résume les colonnes à utiliser pour obtenir des plans de résolution maximum en fonction du nombre de facteurs. Une règle mnémotechnique très simple à retenir pour avoir un plan de résolution *IV* est la suivante :

Règle pour les tables 2^n (L_4 , L_8 , L_{16} , L_{32} ...)

Pour avoir un plan de résolution *IV*, il suffit de placer les facteurs dans les colonnes impaires des tables de Taguchi, les colonnes paires correspondent alors aux interactions

Table L_8

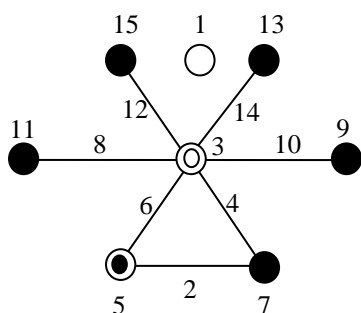
Nombre de facteurs	Colonnes à utiliser	Résolution
3	1, 2, 4	Plan complet
4	1, 3, 5, 7 ou 1, 2, 4, 7	<i>IV</i>
De 5 à 7	En fonction des interactions retenues	<i>III</i>

Table L_{16}

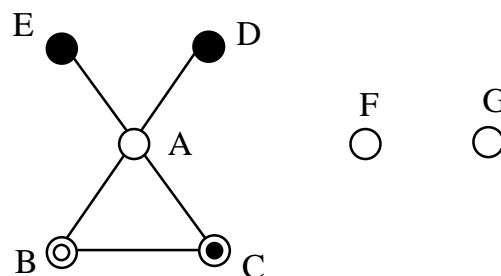
Nombre de facteurs	Colonnes à utiliser	Résolution
4	1, 2, 4, 8	Plan complet
5	1, 2, 4, 8, 15	<i>V</i>
6 à 8	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ou 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14	<i>IV</i> <i>IV</i>
De 9 à 15	En fonction des interactions retenues	<i>III</i>

Figure 4.3 - Optimisation du choix des colonnes

Reprenons l'exemple du paragraphe 4, mais au lieu d'utiliser le graphe 2 de Taguchi, nous allons utiliser un graphe de résolution IV.



Graphe de résolution IV



Graphe du problème

L'affectation des colonnes donne :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G
Colonnes	3	5	7	13	15	11	9

Tableau de recherche des interactions

Le tableau a été établi à partir du triangle des interactions de la table L_{16} .

AB	6	AC	4	AD	15	AE	12	AF	8	AG	10
BC	2	BD	8	BE	10	BF	14	BG	12		
CD	10	CE	8	CF	12	CG	14				
DE	2	DF	6	DG	4						
EF	4	EG	6								
FG	2										

Tableau d'alias

Action du modèle	Colonne	Alias
A	3	
B	5	
C	7	
D	13	
E	15	
F	11	
G	9	
AB	6	EG + DF
AC	4	DG + EF
BC	2	DE + FG
AD	14	BF + CG
AE	12	CF + BG

Comme le montre le tableau des alias, en utilisant un graphe de résolution IV, chaque facteur est déterminé sans ambiguïté. Par contre, les interactions sont alias avec d'autres interactions. La réalisation de ce plan est beaucoup plus conseillé que le plan de résolution III développé au paragraphe 4.

7. Les différentes tables et leurs propriétés

Taguchi a publié 18 tables orthogonales qui permettent de résoudre la plupart des problèmes industriels. Cependant, toutes ces tables n'ont pas les mêmes propriétés et il est important de bien connaître les différences entre ces tables qui peuvent être classées en trois types :

- étude des interactions impossible ;
- étude des interactions limitée ;
- étude des interactions possible.

En effet, certaines tables ne permettent pas l'étude des interactions. C'est le cas notamment de la table $L_{12}(2^{11})$ qui ne possède pas de triangle des interactions, alors que d'autres permettent l'étude de multiples interactions comme la table $L_{32}(2^{21})$.

7.1. Etude des interactions impossible

Les tables pour lesquelles l'étude des interactions est impossible sont des tables qui ne possèdent pas de triangle d'interactions, ni de graphe linéaire. Ces tables sont les suivantes :

- table $L_{12}(2^{11})$;
- table $L_{36}(2^7 \times 3^{12})$.

Lorsqu'on utilise ces tables, il n'est pas possible d'étudier les interactions entre deux colonnes car ces interactions ne sont pas orthogonales aux facteurs principaux. Un rapide calcul sur la condition d'orthogonalité (chapitre 3) permettra au lecteur de constater que la table L_{12} notamment n'étant pas multiple de 8 ne peut permettre l'étude des interactions entre facteurs à deux niveaux.

Dans ce type de table, les interactions se retrouvent "diluées" sur l'ensemble des colonnes. Ainsi en cas d'interaction non nulle et forcément non présente dans le modèle pour ce type de table, l'erreur d'interprétation ne se fera pas sur une seule action, mais sur l'ensemble des actions du modèle. En compensation de cet inconvénient, l'effet de l'interaction étant dilué, l'erreur commise sur chaque action sera faible par rapport à l'interaction en cause.

Ce type de table convient parfaitement lorsque la stratégie est une recherche d'extremum. Dans ce cas, on cherche principalement le sens de l'effet des facteurs ainsi que son ordre de grandeur. Il n'est pas indispensable d'étudier les interactions, et il est préférable d'étudier un grand nombre de facteurs. On réalise un balayage rapide de l'ensemble des facteurs supposés influents. Si nous regardons la table L_{12} , elle permet d'étudier jusqu'à 11 facteurs à 2 niveaux en 12 essais, ce qui est souvent très utile pour dégrossir un problème.

7.2. Etude des interactions limitée

Dans ce type de table, il n'est possible d'étudier qu'une seule interaction entre deux facteurs. Ces tables sont les suivantes :

- table $L_{18}(2^1 \times 3^7)$;
- table $L_{32}(2^1 \times 4^9)$;
- table $L_{50}(2^1 \times 5^{11})$.

L'utilisation de ces tables est assez proche des cas où l'étude des interactions est impossible. Une seule interaction peut être estimée.

7.3. Etude des interactions possible

C'est le cas le plus classique pour lequel il existe des graphes linéaires, ainsi qu'un triangle des interactions. Dans ce cas, l'étude de l'ensemble des interactions est possible mais chaque interaction "consomme" une (ou plusieurs) colonne(s). En cas d'interaction non nulle, mais non prise en compte dans le modèle, celle-ci sera alias d'une autre action que l'on trouve dans le triangle des interactions. Ces tables sont les suivantes :

- $L_4 (2^3), L_8 (2^7), L_{16} (2^{15}), L_{32} (2^{31}), L_{64} (2^{63}) ;$
- $L_9 (3^4), L_{27} (3^{13}), L_{81} (3^{40}) ;$
- $L_{36} (2^3 \times 3^{13}), L_{54} (2^1 \times 3^{25}) ;$
- $L_{16} (4^5), L_{64} (4^{21}) ;$
- $L_{25} (5^6) .$

8. Stratégie et plans d'expériences

8.1. Les deux objectifs de base

La réalisation d'un plan d'expériences consiste à adopter une stratégie optimale dans la conduite des essais que l'on souhaite mener. En fonction de l'objectif de l'étude, cette stratégie sera différente, et il convient dès à présent de bien dissocier les deux stratégies de base.

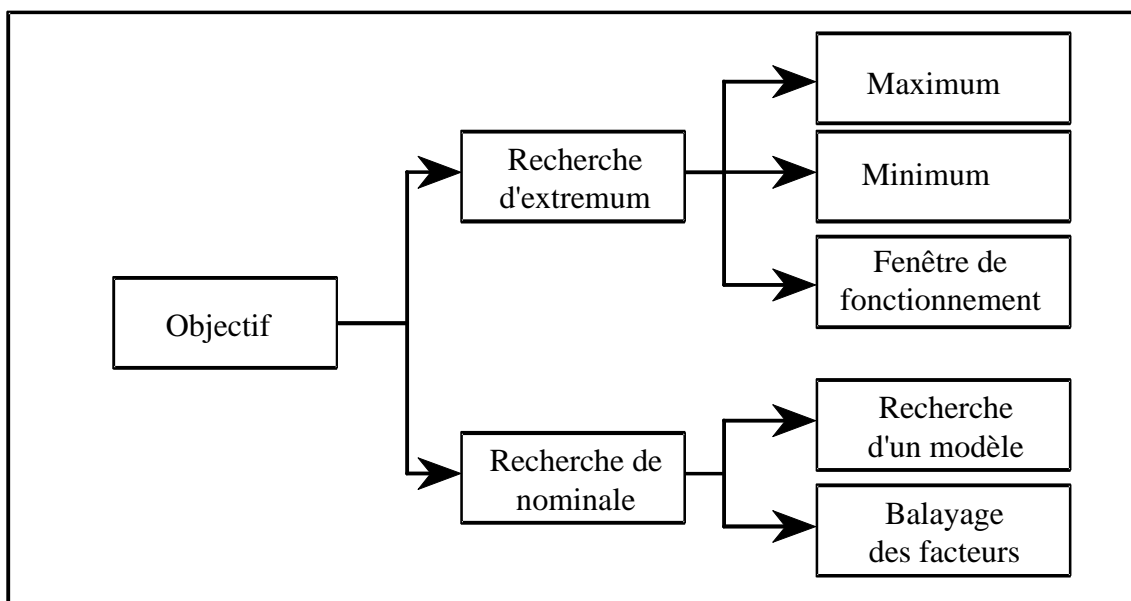


Figure 4.4 - Les différentes stratégies

Recherche d'extremum

Lorsqu'on étudie un système, on peut retenir deux types d'objectifs. Le premier consiste à déterminer parmi de très nombreux facteurs, ceux qui ont une influence sur le procédé et le sens de

cette influence. Cet objectif correspond à une **recherche d'extremum** qui sera soit un minimum soit un maximum.

La recherche d'extremum peut également correspondre à un minimum et à un maximum en même temps. On parle alors de "fenêtre de fonctionnement".

Exemple de recherche de minimum

Dans le cas d'amélioration de la capacité d'un procédé, on recherche tous les facteurs qui ont une influence sur la dispersion. La mise en œuvre d'un plan d'expériences, dans ce cas, aura comme objectif de déterminer le niveau des facteurs influents tel que la dispersion soit minimum.

Exemple de fenêtre de fonctionnement

Dans le cas de la conception d'une alimentation en feuille à feuille, on recherchera la conception du mécanisme qui demandera :

- la force la plus faible possible pour délivrer une feuille ($F1$) ;
- la force la plus forte possible pour délivrer plus d'une feuille ($F2$).

Entre $F1$ et $F2$, le système fonctionnera correctement en ne délivrant qu'une feuille.

C'est également le cas d'une conception d'un mécanisme de déclenchement d'une sécurité. On veut concevoir un mécanisme capable d'être ajusté dans la fenêtre la plus large possible.

Recherche de nominale

Le deuxième objectif consiste à rechercher de façon plus précise une valeur cible qui n'est ni un minimum, ni un maximum. Cet objectif passe par une modélisation du système. Dans ce cas, on cherchera un modèle capable de prédire la réponse du système pour une configuration quelconque des facteurs.

Il est cependant difficile de rechercher un modèle précis lorsque les facteurs principaux intervenants dans le modèle ne sont pas connus. On recherchera dans ce cas à identifier les principaux facteurs en balayant le plus largement possible sans s'intéresser aux interactions. Ce qui sera fait dans un deuxième temps.

Exemple de recherche de nominale

On souhaite piloter une installation chimique très sensible à des paramètres extérieurs non maîtrisables tels que la température extérieure et l'hygrométrie. En fonction de l'état de ces paramètres, on veut connaître l'action à réaliser sur les paramètres de pilotage afin de fournir une réponse constante quel que soit l'état des paramètres non maîtrisés.

8.2. Le choix d'une stratégie

8.2.1. Cas de recherche d'extremum

La stratégie d'expériences retenue consistera à étudier le plus possible de facteurs, mais, en considérant un minimum de niveaux. En règle générale, les interactions entre facteurs seront négligées.

En effet, dans cette stratégie, on cherche à positionner les différents facteurs de telle sorte que chacun maximise (ou minimise) la réponse du système. Les interactions étant généralement faibles

par rapport aux effets principaux, on préfère étudier un plus grand nombre de facteurs plutôt que de rechercher les interactions.

La figure 4.5 illustre, par un diagramme des interactions, l'erreur que l'on fait lorsqu'on n'étudie pas les interactions dans le cas d'une recherche d'un maximum. Dans le cas 1, nous avons étudié les interactions, le maximum se trouve pour $A=2$ et $B=2$. Dans le cas 2, les interactions ne sont pas considérées, mais comme celles-ci étaient plus faibles que l'effet des facteurs, nous trouvons le maximum également pour la configuration $A=2$ et $B=2$. Dans ce cas de figure, la prédictivité du modèle n'est pas très bonne en précision, mais le modèle sans interaction permet de hiérarchiser les facteurs les uns par rapport aux autres, de trouver la configuration optimale.

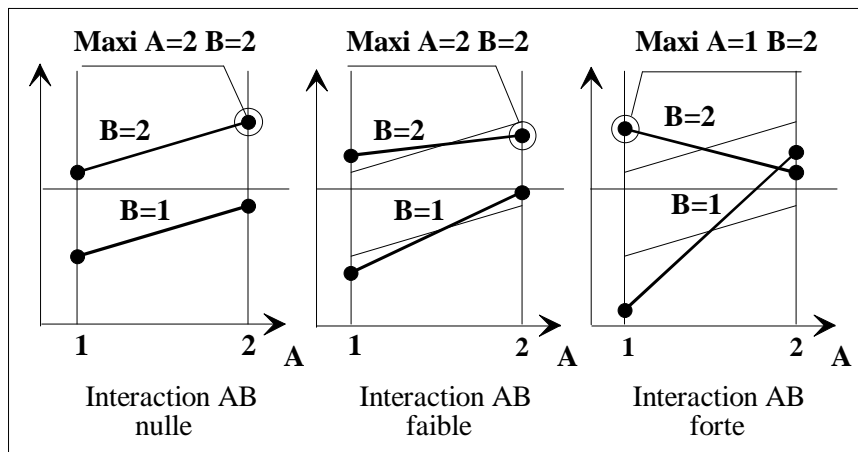


Figure 4.5 - Diagramme des interactions dans une recherche d'extremum

Dans le cas 3, l'interaction entre les deux facteurs est plus importante que l'effet principal des facteurs. Ce cas est assez rare en pratique lorsque les réponses sont choisies avec précaution. Dans ce cas, non seulement la prédictivité du modèle n'est pas bonne, mais l'optimum donné n'est pas le vrai optimum. En règle générale, on s'aperçoit de ce type d'erreur lors de l'essai de confirmation qui donne un résultat réel assez éloigné du résultat espéré.

En conclusion

Dans le cas de recherche d'extremum, il est préférable de privilégier le nombre de facteurs, plutôt que la précision du modèle.

Les tables fortement recommandées pour l'étude d'un maximum sont les tables L_{12} et L_{18} (paragraphe 7.1).

8.2.2. Cas de recherche de nominale

Dans ce cas, il faut être plus fin dans l'analyse. Le nombre de niveaux retenus pour l'analyse pourra être plus élevé. L'étude portera sur les principaux facteurs et on ne retiendra pas plus de 5 à 6 facteurs. Le fait de rechercher une valeur nominale nous conduit généralement à ne pas négliger les interactions entre les facteurs. En effet, le modèle doit être prédictif, et négliger les interactions conduit à un modèle assez sommaire qui ne donne que les tendances générales, mais dont la prédictivité est assez médiocre.

Un cas particulier peut cependant se produire lorsqu'on étudie le système pour la première fois. Il est souvent utile de procéder à une première approche permettant de déceler les facteurs les plus

influent. Dans ce cas, on privilégie l'étude d'un plus grand nombre de facteurs plutôt que l'étude détaillée des interactions. La stratégie se rapproche alors des cas de recherche d'extremum.

Ce sont les cas de recherche de nominale qui sont les plus délicats à traiter dans les plans d'expériences car il est important de ne pas sous-estimer les interactions qui peuvent être importantes. Il faut trouver un compromis entre le nombre d'essais à réaliser, les hypothèses que l'on fait sur les interactions supposées faibles ou nulles, les risques d'alias que l'on est prêt à prendre. Lorsque le système étudié est déjà connu, que l'on a réalisé plusieurs plans d'expériences sur le sujet, le modèle est alors facilement supposé, et on sait parfaitement les interactions importantes. Le plan s'obtient alors rapidement à partir des graphes de Taguchi.

Dans le cas d'une première approche, il est souvent très difficile de dire *a priori* où se trouvent les interactions importantes. Notre expérience nous a montré que même les opérateurs les plus avertis avaient bien du mal à dissocier un effet d'une interaction. Ceci est encore plus vrai lorsque l'on étudie plusieurs réponses pour le même plan d'expériences. Les modèles pour chaque réponse peuvent être différents. Il est alors bien difficile de faire des hypothèses sur les interactions supposées faibles ou nulles. Dans ce cas, une stratégie de moindre risque consiste à utiliser le graphe (1a) de la table L₁₆.

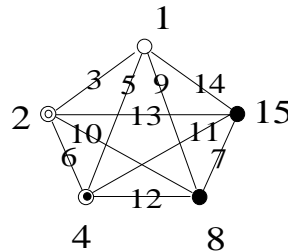


Figure 4.6 - Graphe (1a) table L₁₆

Ce graphe permet d'étudier 5 facteurs et toutes les interactions entre ces 5 facteurs. Il correspond au plan complet (32 essais) fractionné une fois, c'est un plan de résolution V. Cette stratégie de moindre risque est coûteuse en essais, mais permet de bien identifier un modèle à 5 facteurs sans alias important. Dans ce plan, les facteurs (de type A) sont alias aux interactions de quatrième ordre (de type BCDE) et les interactions de second ordre (AB) sont alias avec les interactions de troisième ordre (de type CDE).

Une autre approche de moindre risque consiste à utiliser uniquement les graphes de résolution IV. En utilisant les colonnes des graphes de résolution IV on est sûr de déterminer sans ambiguïté les facteurs d'ordre I. Seules les interactions seront aliassées entre elles.

8.3. Les différentes approches

Afin de synthétiser les différentes approches d'un plan d'expériences, nous proposons les tableaux figure 4.7 et 4.8.

- La hiérarchie des facteurs influents peut parfois être connue par l'expérience empirique d'une société.
- Le type de modèle peut parfois être deviné à partir des connaissances sur les lois de la mécanique de la physique...

On peut donc se situer dans quatre configurations possibles en fonction du problème posé, et des connaissances dont on dispose sur le type de modèle recherché.

		Connaissances (<i>Type de modèle</i>)	
		Présentes	Absentes
Problème <i>(hiérarchie des facteurs influents)</i>	Clair, connu	Routine Plans déjà élaborés	Formalisation Plans complets ou Plans avec de nombreuses interactions Plans de résolution IV ou V (L ₁₆ - Graphe 1a)
	Pas clair, inconnu	Développement Plans fractionnés Fortes hypothèses sur les interactions nulles On peut utiliser des plans de résolution III	Innovation Débroussaillage Pas d'étude d'interactions Table L ₁₂ ou L ₁₈

Figure 4.7 - Synthèse des différentes approches

Lorsque le lecteur sera un peu rodé aux techniques des plans d'expériences, il se rendra compte que le choix de la stratégie d'essais est un point-clé de la méthode. C'est aussi un des aspects les plus intéressants à conduire. On peut également faire une classification en fonction de la stratégie retenue :

Stratégies	Objectifs	Situations	Plans typiques
Balayage	Etudier un maximum de facteurs	Recherche d'extremum	L ₁₂
	Hiérarchiser l'influence des facteurs	Première approche d'un problème, on ne cherche pas les interactions	L ₁₈
Nominale	Se limiter à quelques facteurs	Vouloir mieux comprendre un phénomène physique	Plans complets L ₈ Res IV
	Rechercher les interactions non nulles	Rechercher un modèle prédictif Atteindre une valeur cible	L ₁₆ Res V L ₁₆ Res IV
Identification	Identifier les actions d'un modèle connu	Rechercher un optimum en faisant de fortes hypothèses sur les interactions nulles	Plans fractionnaires L ₈ , L ₁₆

Figure 4.8 - Synthèse des différentes stratégies

9. Exemple de mise en place de stratégie

9.1. Exposé du problème : injection de pièces plastiques

Une pièce est fabriquée sur une presse à injecter et les techniciens de l'atelier connaissent quelques difficultés avec le retrait après injection. L'injection comporte deux paliers de maintien en pression après injection que nous appellerons maintiens 1 et 2. Un travail de groupe a été organisé pour connaître les paramètres susceptibles d'avoir une influence sur le retrait.

Les paramètres sont les suivants :

A - Type de machine	Groupe 1
B - Température du moule	Groupe 3
C - Pression de maintien 1	Groupe 4
D - Temps de maintien 1	Groupe 4
E - Pression de maintien 2	Groupe 4
F - Temps de maintien 2	Groupe 4
G - Rotation de la vis sans fin	Groupe 4
H - Humidité de la matière	Groupe 2
I - % de rebroyés	Groupe 2

Tous ces paramètres sont à deux niveaux.

Quelques interactions sont supposées exister, mais supposées faibles par rapport aux facteurs principaux. Les principales interactions supposées sont les suivantes :

Interaction CE.
Interaction CD.
Interaction EF.
Interaction BG.

Dans cette étude, nous cherchons à minimiser le retrait. Nous sommes donc dans une stratégie "*Recherche d'extremun*"

9.2. Recherche du plan adapté

En fonction de l'étude précédente, nous pouvons écrire le modèle recherché en fonction de la stratégie que nous souhaitons suivre.

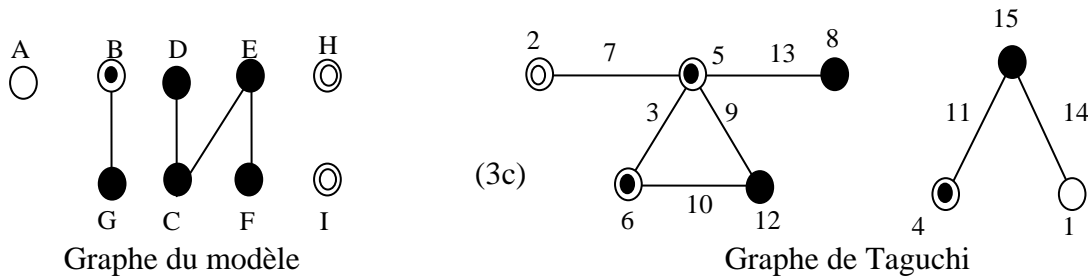
Etude des interactions

Si nous souhaitons un modèle complet prenant en compte les interactions, celui-ci s'écrit :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + E + F + G + H + I + CE + CD + EF + BG$$

Le lecteur vérifiera rapidement que les conditions sur le nombre de degrés de liberté et sur l'orthogonalité du modèle conduit à utiliser la table L_{16} .

Le graphe linéaire du modèle s'écrit dans ce cas :



En comparant le graphe de l'application avec le graphe de Taguchi, le placement des colonnes vient assez facilement, les facteurs sont placés comme ci-dessous :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G	H
Colonnes	1	4	5	8	12	6	15	2

Il reste le facteur *I* qui n'a plus de "rond" disponible mais que nous pouvons placer dans la colonne 3 car cette colonne est ALIAS avec l'interaction 5/6 (ici *CF*) que nous supposons nulle. Le lecteur pourra vérifier que dans ce type de plan chaque facteur sera alias avec de nombreuses interactions. Dans ce cas de figure (plus de 8 facteurs), il n'existe pas de plans à 16 essais de résolution *IV*, on a forcément un plan de résolution *III*. Il est donc parfois préférable de prendre la stratégie de balayage.

Stratégie de balayage, limitation aux facteurs principaux

L'autre stratégie qu'on peut adopter consiste à se limiter aux effets des facteurs principaux. Dans ce cas, le modèle s'écrit :

$$Y \sim M + A + B + C + D + E + F + G + H + I$$

Le nombre de degrés de liberté est de 10. Les interactions sont supposées faibles. De plus, nous ne recherchons pas un modèle expliquant le retrait, nous recherchons simplement à configurer les paramètres de telle sorte qu'il soit minimum. Nous choisirons donc de ne pas étudier les interactions et de se limiter à la table L_{12} .

Affectation des colonnes

L'affectation des colonnes dans la table L_{12} s'effectue en fonction de la difficulté de modification des niveaux donc en fonction du groupe dans lequel le paramètre a été classé.

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Groupes	1	3	4	4	4	4	4	2	2
Colonnes	1	5	4	6	7	8	9	2	3

9.3. Conduite des essais

Les essais sont conduits en respectant l'ordre de la table L_{12} pour minimiser le nombre de changement de niveaux des facteurs difficiles à modifier. Le résultat des essais a donné :

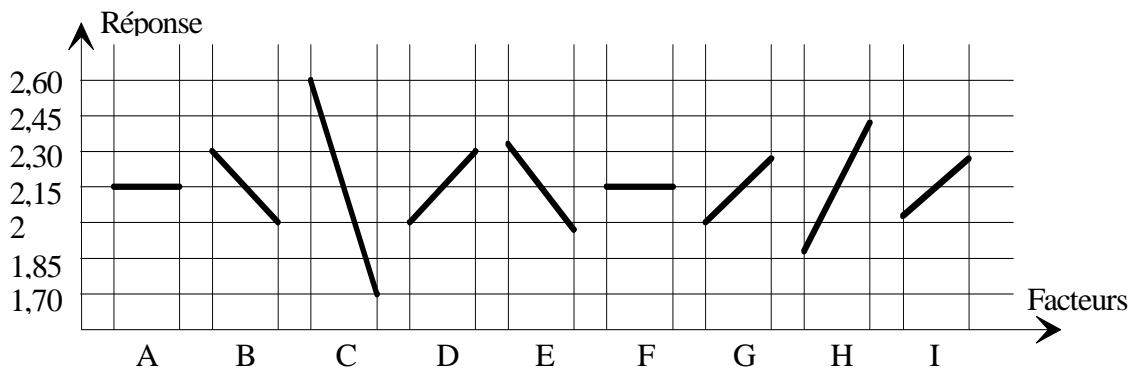
N°	A	B	C	D	E	F	G	H	I	Y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2,20
2	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2,45
3	1	2	2	1	1	1	2	1	2	1,55
4	1	2	2	1	2	2	1	2	1	1,20
5	1	2	1	2	1	2	1	2	2	3,05
6	1	1	2	2	2	1	2	2	2	2,30
7	2	1	2	1	2	2	1	1	2	1,30
8	2	2	1	2	2	1	1	1	2	2,10
9	2	2	2	2	1	2	2	1	1	1,65
10	2	1	1	1	1	2	2	2	2	3,30
11	2	1	2	2	1	1	1	2	1	2,25
12	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2,50

9.4. Dépouillement

Tableau des moyennes (Moyenne générale = 2,154)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Niveau 1	2,12	2,30	2,6	2,00	2,33	2,15	2,02	1,87	2,04
Niveau 2	2,18	2,00	1,7	2,30	1,97	2,16	2,29	2,43	2,26
Effet 1	-0,03	0,15	0,45	-0,15	0,18	0,0	-0,14	-0,28	-0,11
Effet 2	0,03	-0,15	-0,45	0,15	-0,18	0,0	0,14	0,28	0,11

Graphe des effets



En appliquant les formules de calcul des effets que nous avons définies précédemment, nous pouvons établir le modèle suivant du procédé d'injection (les chiffres sont arrondis pour plus de lisibilité) :

$$Y \sim 2,15 + [0,15 \quad -0,15]B + [0,45 \quad -0,45]C + [-0,15 \quad 0,15]D + [0,18 \quad -0,18]E + [-0,14 \quad 0,14]G + [-0,28 \quad 0,28]H + [-0,11 \quad 0,11]I$$

Les facteurs A et F ne sont pas significatifs comme le montre le graphe des effets. Pour s'en assurer, il faut faire une analyse de variance telle que nous le verrons au chapitre 7.

9.5. Interprétation

L'objectif de notre analyse était de minimiser le retrait après injection. Pour cela, nous devons choisir le niveau des facteurs tel que l'effet réduise le retrait. On choisit les points bas du graphe des effets.

$$Y \sim = 2,15 + [0,15 \text{ } \underline{-0,15}]B + [0,45 \text{ } \underline{-0,45}]C + [\underline{-0,15} \text{ } 0,15]D \\ + [0,18 \text{ } \underline{-0,18}]E + [\underline{-0,14} \text{ } 0,14]G + [\underline{-0,28} \text{ } 0,28]H + [\underline{-0,11} \text{ } 0,11]I$$

Les niveaux soulignés dans le modèle précédent réalisent cet objectif. L'optimum sera donc atteint pour la configuration suivante :

Facteurs	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Niveau optimum	?	2	2	1	2	?	1	1	1

Les facteurs *A* et *F* n'étant pas influents, ils pourront être placés au niveau 1 ou 2, cela n'a pas d'importance. Cette configuration optimale doit donner comme retrait :

$$Y = 2,15 - 0,15 - 0,45 - 0,15 - 0,18 - 0,14 - 0,28 - 0,11 = 0,69$$

9.6. Expérience de confirmation

Le plan d'expériences a permis de déterminer les facteurs influents, et de déterminer les niveaux optimaux pour chacun d'entre eux. Il faut maintenant vérifier la reproductibilité des résultats en effectuant un essai complémentaire dans les conditions optimales.

Lors de cet essai de confirmation, différents cas peuvent se produire :

Cas n° 1 : Réponse = 0,71

Dans ce cas notre modèle est très satisfaisant (3% d'écart), la réponse est proche de la réponse prédite, les interactions sont probablement nulles ou très faibles.

Cas n°2 : Réponse = 0,45

Dans ce cas, notre modèle n'est pas très satisfaisant car la réponse est assez éloignée de la réponse prédite par le modèle. Cependant, elle est meilleure que la réponse prédite. Il est probable que les interactions ne sont pas nulles, et qu'elles amplifient les effets des facteurs principaux. Il est évident que nous nous satisferons de cette solution.

Cas n°3 : Réponse = 1,2

Comme dans le cas n°2, le modèle n'est pas très satisfaisant. Il y a probablement des interactions qui tempèrent les effets des facteurs principaux. Cependant, si le retrait obtenu jusqu'à ce jour était de 1,9 nous nous satisferons de ce résultat provisoire tout en cherchant d'autres améliorations.

Cas n°4 : Réponse = 2,05

Dans ce cas, le modèle est trop loin de la réalité, nous devons rejeter les résultats de l'expérience. Avant d'aller plus loin dans l'analyse, il faut rechercher les raisons de cet écart entre le modèle et la réalité. Pour expliquer un tel écart, il peut y avoir 3 raisons essentielles :

1. Mauvais choix des facteurs

Le choix des facteurs étudiés dans le plan n'était pas judicieux. Il existe d'autres facteurs, dont l'influence est importante, qui viennent perturber les essais.

2. Présence d'interactions fortes non présentes dans le modèle

Le modèle retenu ne comportait pas d'interaction. En cas d'existence d'interactions, les effets calculés sont biaisés par celles-ci. Ils sont donc faux. Dans ce cas, le modèle retenu aura une faible valeur de prédiction. Bien que ce cas puisse se présenter de temps à autre, il faut faire attention à ne pas "transformer le travail de l'ingénieur en un travail de chasseur d'interactions" comme le souligne Taguchi. L'étude des interactions est coûteuse en essais et il faut en limiter l'utilisation.

3. Pas assez d'écart entre les niveaux des facteurs

C'est une erreur courante qui consiste à placer le niveau 1 trop près du niveau 2. L'effet des facteurs est alors proche de la variance résiduelle et il est difficile de déterminer ces effets avec précision.

10. Cas des réponses qualitatives

10.1. Réponses quantitatives et qualitatives

Dans tous les exemples que nous avons traités depuis le début de cet ouvrage, la réponse que nous mesurons sur le système étudié était une **mesure** qui s'exprimait par un **chiffre** qui possédait la propriété d'additivité. Cette propriété existe lorsque l'addition entre deux chiffres à un sens, ce qui n'est pas toujours le cas. En effet, si nous classons les résultats d'une expérience par une note de 1 à 3, les relations d'ordre "supérieur" et "inférieur" ont un sens, mais l'addition n'en a pas forcément.

Les réponses mesurées seront appelées des "**réponses quantitatives**".

Pourtant, il n'est pas toujours possible de "mesurer" le résultat d'une expérience. De nombreux cas d'application des plans d'expériences comme les défauts d'aspect, de réalisation, les notions de confort d'utilisation, sont difficilement "mesurables", mais sont "appréciées". On peut par exemple classer les résultats en trois catégories "bon", "moyen", "médiocre", mais on ne peut pas mesurer les résultats obtenus.

Ce type de réponse est appelé "**réponse qualitative**".

10.2. Etude de l'aspect d'une installation de peinture

Nous avons étudié au chapitre 2 une installation de vernissage avec comme réponse la couleur du vernis obtenue. Nous nous intéresserons dans ce paragraphe à la même installation, mais en évaluant l'aspect de la peinture. Un vernis bien appliqué doit avoir un aspect brillant, il doit être lisse et bien tendu. Cet aspect est en fait un nominal. En effet, si le vernis est trop tendu il y a présence de coulure, par contre, si le vernis n'est pas assez tendu, l'aspect est de type "peau d'orange". Nous avons donc classé les résultats en trois catégories :

- aspect peau d'orange ;
- bien tendu ;
- présence de coulures.

Les facteurs étudiés dans cette expérience sont les suivants :

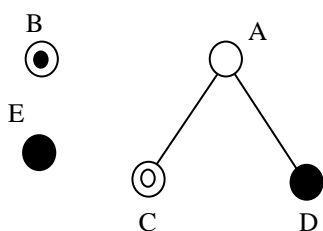
N°	Facteurs	Difficulté	Niveau 1	Niveau 2
A	Pourcentage de diluant	Très difficile	20%	40%
B	Température du vernis	Assez difficile	15°C	25°C
C	Distance pistolet/objet	Difficile	15 cm	30 cm
D	Ouverture du pistolet	Facile	3 crans	5 crans
E	Pression du pistolet	Facile	1 bar	3,5 bars

Les interactions supposées sont résumées dans le tableau suivant :

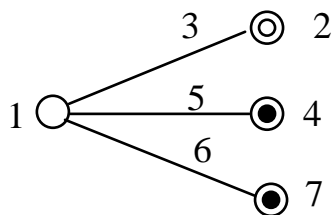
	A	B	C	D	E
A					
B	N				
C	O	N			
D	O	N	N		
E	N	N	N	N	

Le modèle recherché s'écrit : $Y \sim M + A + B + C + D + E + AC + AD$

Compte tenu du nombre de degrés de liberté et des interactions, la table choisie est la table L_8 (voir tableau page 131).



Graphe du problème



Graphe de Taguchi

L'affectation des colonnes donne :

	A	B	C	D	E
Colonne	1	6	2	4	7

Chaque essai portera sur la réalisation de 40 produits. Il est d'ailleurs fortement recommandé de répéter le plan dans le cas d'un critère qualitatif. Le plan a donné les résultats suivants :

N°	A 1	B 6	C 2	D 4	E 7	Nombre de couleurs	Nombre de bien tendus	Nombre de peaux d'orange	Total
1	1	1	1	1	1	10	28	2	40
2	1	2	1	2	2	4	35	1	40
3	1	2	2	1	2	3	32	5	40
4	1	1	2	2	1	20	17	3	40
5	2	1	1	1	2	0	23	17	40
6	2	2	1	2	1	17	21	2	40
7	2	2	2	1	1	7	33	0	40
8	2	1	2	2	2	9	25	6	40
Total						70	214	36	

10.3. Interprétation du plan d'expériences

Dans le cas d'un critère qualitatif, on ne cherchera pas à obtenir un modèle prédictif comme c'est le cas pour les critères quantitatifs. On cherchera principalement à obtenir les tendances de chaque facteur. Le principe de l'interprétation est identique au cas classique.

Tableau des effets principaux

	A			B			C			D			E		
	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang
1	37	112	11	39	93	28	31	107	22	20	116	24	54	99	7
2	33	102	25	31	121	8	39	107	14	50	98	12	16	115	29

Total des coulures lorsque A est au niveau 2

Représentation graphique

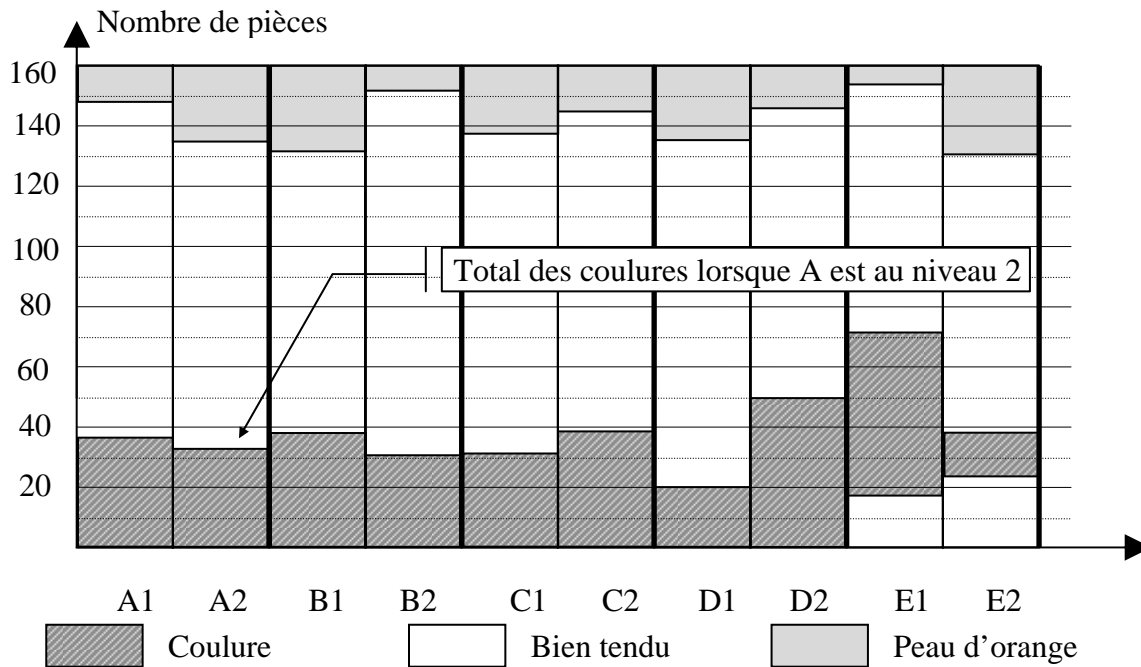


Figure 4.9 - Graphique des effets

Tableau des interactions

	A1			A2		
	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang
C1	14	63	3	17	44	19
C2	23	49	8	16	58	6

	A1			A2		
	Coul	Bien Tend	Peau Orang	Coul	Bien Tend	Peau Orang
D1	13	60	7	7	56	17
D2	24	52	4	26	46	8

Total des coulures lorsque A = 1 et C = 2

Le tableau se traduit par le graphique suivant :

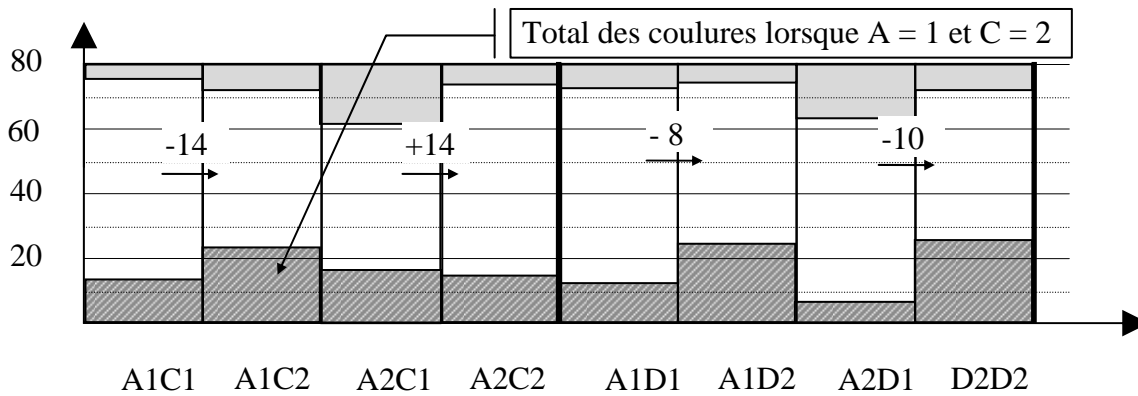


Figure 4.10 - Graphique des interactions

Choix des niveaux optimaux

Dans l'exemple choisi, le problème consiste à fixer les facteurs tels que le vernis soit bien tendu en évitant les configurations qui provoquent les coulures ou un aspect peau d'orange. L'interprétation est assez facile au regard des graphiques des effets principaux et des interactions. En effet, le choix optimal consiste à maximiser la colonne "bien tendu" et à minimiser les colonnes "coulures" et "peau d'orange". L'optimisation à partir du graphique consiste à choisir le niveau qui maximise la partie blanche "bien tendu".

Pour les facteurs sans interaction (*B* et *E*) :

- *B* doit être placé au niveau 2 ;
- *E* doit être placé au niveau 1.

Pour les facteurs liés par des interactions, il faut regarder le graphique des interactions.

- L'interaction *AC* est forte, l'effet du facteur *C* s'inverse selon l'état du facteur *A*.
- L'interaction *AD* est faible ou nulle, l'effet du facteur *D* est constant quel que soit le niveau du facteur *A*.

La configuration optimale est donc :

	A	B	C	D	E
Niveau	1	2	1	1	2

Validation du résultat

Comme pour tous plans d'expériences, il est indispensable de valider les résultats par une expérience de confirmation sur un point non mesuré du plan d'expériences.

Prédiction du résultat

Dans ce type de plan d'expériences, on ne cherche pas - en principe - un modèle prédictif du comportement du système. On cherche à montrer des tendances afin d'optimiser une ou plusieurs réponses. Pourtant, il est possible d'obtenir une prédiction des résultats en prenant quelques précautions.

N°	A 1	B 6	C 2	D 4	E 7	Coulure		Bien tendu		Peau d'orange		Total
						Nb	%	Nb	%	Nb	%	
1	1	1	1	1	1	10	25	28	70	2	5	40
2	1	2	1	2	2	4	10	35	87,5	1	2,5	40
3	1	2	2	1	2	3	7,5	32	80	5	12,5	40
4	1	1	2	2	1	20	50	17	42,5	3	7,5	40
5	2	1	1	1	2	0	0	23	57,5	17	57,5	40
6	2	2	1	2	1	17	42,5	21	52,5	2	5	40
7	2	2	2	1	1	7	17,5	33	82,5	0	0	40
8	2	1	2	2	2	9	22,5	25	62,5	6	15	40
Total						70	21,87	214	66,88	36	11,25	320

Pour cela, il nous faut calculer les effets de chaque action par la formule traditionnelle en raisonnant sur les pourcentages :

Effet au niveau i = moyenne de l'action au niveau i - moyenne générale

On trouve alors le tableau des effets suivants :

Action	A	B	C	D	E	AC	AD
Effet 1	3,125	-8,75	0	5,625	-5	8,75	-0,625

La réponse estimée dans la configuration optimale pour le pourcentage de résultats "bien tendu" est donc :

	A	B	C	D	E
Niveau	1	2	1	1	2

$$Y_{\sim} = \text{Moyenne} + E_{A1} + E_{B2} + E_{C1} + E_{D1} + E_{E1} + I_{A1B2} + I_{A1D1}$$

$$Y_{\sim} = 66,88\% + 3,125\% + 8,75\% + 0\% + 5,625\% + 5\% + 8,75\% - 0,625\%$$

$$Y_{\sim} = 97,5 \%$$

Cependant, l'addition de pourcentages ne donne pas toujours des résultats convenables. En effet, l'additivité de deux effets en pourcentage n'est pas bonne et conduit souvent à des résultats supérieurs à 100% (ou inférieurs à 0%) surtout lorsque les pourcentages sont proches de 0 ou de 100%. Pour améliorer l'additivité de ce type d'effet, on peut utiliser une transformation logarithmique appelée "**transformation OMÉGA**".

Nous pourrions en utilisant les réponses "coulures" et "peau d'orange", obtenir de la même manière les réponses estimées sur ces deux critères. Bien entendu, il reste fondamental de faire un essai de confirmation pour vérifier les résultats espérés.

10.4. Transformation OMÉGA

Pour améliorer l'additivité du modèle lorsque l'on travaille en pourcentage, on peut opérer un changement d'échelle logarithmique en posant :

$$\Omega = -10 \log\left(\frac{I}{p} - 1\right) \text{ en décibels}$$

avec p la proportion ayant le caractère.

Nous prendrons comme exemple de transformation le cas précédent. Pour calculer la prédiction des résultats, nous avons posé :

$$Y_{\sim} = \text{Moyenne} + E_{A1} + E_{B2} + E_{C1} + E_{D1} + E_{E1} + I_{A1B2} + I_{A1D1}$$

$$Y_{\sim} = p_{moy} + (p_{A1} - p_{moy}) + (p_{B2} - p_{moy}) + (p_{C1} - p_{moy}) + (p_{D1} - p_{moy}) \\ + (p_{E1} - p_{moy}) + (p_{AB2} - p_{moy}) + (p_{AD1} - p_{moy})$$

$$Y_{\sim} = \frac{214}{320} + \left(\frac{112}{160} - \frac{214}{320}\right) + \left(\frac{121}{160} - \frac{214}{320}\right) + \left(\frac{107}{160} - \frac{214}{320}\right) + \left(\frac{116}{160} - \frac{214}{320}\right) \\ + \left(\frac{115}{160} - \frac{214}{320}\right) + \left(\frac{121}{160} - \frac{214}{320}\right) + \left(\frac{106}{160} - \frac{214}{320}\right)$$

$$Y_{\sim} = \frac{112}{160} + \frac{121}{160} + \frac{107}{160} + \frac{116}{160} + \frac{115}{160} + \frac{121}{160} + \frac{106}{160} - 6 \times \frac{214}{320}$$

En appliquant la transformation OMÉGA à cette équation, nous obtenons

$$dB(Y_{\sim}) = dB\left(\frac{112}{160}\right) + dB\left(\frac{121}{160}\right) + dB\left(\frac{107}{160}\right) + dB\left(\frac{116}{160}\right) + dB\left(\frac{115}{160}\right) + dB\left(\frac{121}{160}\right) + dB\left(\frac{106}{160}\right) - 6 \times dB\left(\frac{214}{320}\right)$$

\swarrow $-10 \log(160/106 - 1)$

$$dB(Y_{\sim}) = 4,92 + 3,05 + 4,21 + 4,07 + 4,92 + 2,93 - 6 \times 3,05 = 9,47$$

Ce résultat est exprimé en décibels, pour obtenir le résultat en pourcentage, il faut effectuer la transformation inverse :

$$Y\% = \frac{I}{1 + 10^{(-Db/10)}}$$

On trouve alors $Y_{\sim} = 90\%$. Le résultat est un peu moins optimiste que par l'addition directe des pourcentages, mais souvent plus réaliste.

11. Réalisation des essais par blocs

11.1. Exposé du problème

Supposons que nous souhaitions réaliser le plan d'expériences de 8 lignes suivant. Nous souhaitons que tous les facteurs non pris en compte dans le plan soient figés lorsqu'on réalise le plan.

Modèle recherché : $Y \sim = M + A + B + C + D$ tous les facteurs sont à 2 niveaux.

Le plan retenu est le suivant :

N°	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	1	2	2
3	1	2	1	2
4	1	2	2	1
5	2	1	1	2
6	2	1	2	1
7	2	2	1	1
8	2	2	2	2

Les 4 colonnes sont les colonnes 1, 2, 4 et 7 de la table L_8 .

Supposons que pour des raisons de temps, il ne soit pas possible de réaliser tous ces essais sur la même machine et qu'il soit nécessaire d'utiliser deux machines. Le premier réflexe consiste à réaliser les 4 premiers essais sur la première machine et les quatre suivants sur la seconde. Mais que se passera-t-il si la machine utilisée a une influence sur la réponse mesurée? Bien sûr, l'effet de la machine sera confondu avec l'effet de A et on risque de faire une grave erreur d'interprétation.

Dans ce cas, il faut réaliser les essais par 2 blocs. L'idéal serait de trouver deux blocs tels qu'un éventuel effet induit par ces blocs n'entraîne pas de perturbation sur le calcul des effets.

11.2. Réalisation des essais en blocs

Nous avons vu que si nous partageons le plan en deux parties en réalisant un bloc des 4 premiers essais, l'effet de bloc sera alors alias de l'effet de A. Quelle que soit la coupure réalisée, l'effet de bloc sera alias avec une colonne de la table de Taguchi si la coupure est orthogonale vis-à-vis du modèle. L'effet de bloc peut perturber plusieurs effets de facteurs si la coupure est quelconque et non orthogonale. Dans ce cas, on ne sait plus très bien comment interpréter les résultats.

La méthode pour éviter ces effets de bloc consiste à créer un facteur que nous appellerons X qui nous permettra de couper le plan en blocs. Si nous ajoutons un facteur X au modèle précédent, le modèle s'écrit :

$$Y \sim = M + A + B + C + D + X$$

Le plan d'expériences serait alors si on retient la colonne 3 comme facteur bloc :

N°	A	B	C	D	X
1	1	2	4	7	3
1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1
3	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	2
5	2	1	1	2	2
6	2	1	2	1	2
7	2	2	1	1	1
8	2	2	2	2	1

La colonne X nous permettra de faire la coupure en deux blocs, ainsi, la machine 1 réalisera les essais 1, 2, 7 et 8 alors que la machine 2 réalisera les essais 3, 4, 5 et 6. En réalisant les essais de cette manière, si les machines ont un effet non nul, cet effet se retrouvera dans la colonne X , et ne perturbera pas le calcul des effets des facteurs étudiés. Bien sûr, il sera possible de calculer l'effet de bloc en calculant l'effet du facteur X .

Cette méthode peut être généralisée pour partager un plan en quatre blocs ou en huit blocs toujours par création d'un facteur X à 4 ou 8 niveaux. Cependant, pour établir la colonne à 4 ou 8 niveaux, il faut se reporter au chapitre 8 où nous décrivons la méthode.

12. Désaliasser un plan d'expériences

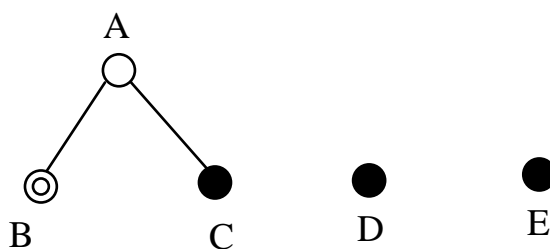
12.1. Le problème

Nous avons vu à plusieurs reprises ce qu'était un alias dans un plan d'expériences. Nous allons étudier comment il est possible de désaliasser un plan 2^k en réalisant un plan complémentaire.

Supposons qu'un expérimentateur ait réalisé un plan tiré de la table L_8 pour identifier le modèle suivant :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + E + AB + AC$$

Tous les facteurs sont à deux niveaux. Le graphe du modèle est le suivant :



Le plan d'expériences réalisé est :

	1	2	4	6	7
Facteur	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2
3	1	2	1	2	2
4	1	2	2	1	1
5	2	1	1	1	2
6	2	1	2	2	1
7	2	2	1	2	1
8	2	2	2	1	2

Les colonnes des interactions d'ordre 2 sont :

AB	3	AC	5	AD	7	AE	6
BC	6	BD	4	BE	5		
CD	2	CE	3				
DE	1						

Le tableau des alias ci-dessous fait apparaître les confusions d'actions du plan d'expériences sur les effets du premier et du second ordre.

Action du modèle	Colonnes	Alias
A	1	DE
B	2	CD
C	4	BD
D	6	AE+BC
E	7	AD
AB	3	CE
AC	5	BE

Supposons qu'après réalisation de l'expérience de confirmation, l'expérimentateur ait quelques doutes sur la présence d'interactions non supposées au départ.

Dans le plan qu'il a réalisé, tous les facteurs du premier ordre sont aliassés avec une ou plusieurs interactions. En cas de doute sur le modèle, il ne peut donc pas avoir une bonne précision sur les effets des facteurs principaux.

12.2. Lever le doute par un plan complémentaire

Pour lever ce doute, il est possible de réaliser une autre table L_8 qui permettra de désaliasser le plan. On recherchera à construire une table L_{16} de résolution IV dans laquelle les facteurs ne seront alias qu'avec des interactions d'ordre supérieur à 2. Ce point est un avantage important des plans d'expériences, même en cas de doute, les essais réalisés ne sont pas perdus. Ils seront utilisés dans l'analyse finale des résultats en regroupant les deux plans complémentaires.

Nous avons remarqué que si nous utilisons les colonnes impaires de la table L_{16} , le plan obtenu était de résolution IV (voir paragraphe 6.4.). Il suffit donc, pour désaliasser le plan de construire des colonnes impaires de la table L_{16} à partir des colonnes de la table L_8 . Pour établir l'autre table L_8 , on procède de la façon suivante.

1. On recopie la table L_8 en ajoutant une colonne X fixée au niveau 1.

		X	A	B	C	D	E
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	1	1	2	2	2
3	3	1	1	2	1	2	2
4	4	1	1	2	2	1	1
5	5	1	2	1	1	1	2
6	6	1	2	1	2	2	1
7	7	1	2	2	1	2	1
8	8	1	2	2	2	1	2
9	1'	2	2	2	2	2	2
10	2'	2	2	2	1	1	1
11	3'	2	2	1	2	1	1
12	4'	2	2	1	1	2	2
13	5'	2	1	2	2	2	1
14	6'	2	1	2	1	1	2
15	7'	2	1	1	2	1	2
16	8'	2	1	1	1	2	1
Colonne (L ₁₆)		1	3	5	9	13	15

2. On complète les 8 lignes (1' à 8') en inversant les 8 lignes (1 à 8) :

- on écrit 1 à la place de 2 ;
- on écrit 2 à la place de 1.

En considérant les 16 essais réalisés (8 essais déjà réalisés plus 8 essais pour désaliasser), nous pouvons calculer l'effet de bloc entre les deux séries d'essais en utilisant la colonne X.

On remarque que les colonnes du plan total (les 16 essais) sont des colonnes impaires de la table L_{16} . Il est donc facile de retrouver le tableau des alias dans le plan.

Les colonnes des interactions d'ordre 2 sont :

AB	6	AC	10	AD	14	AE	12
BC	12	BD	8	BE	10		
CD	4	CE	6				
DE	2						

Les **facteurs** sont dans les colonnes **impaires**, les **interactions** dans les colonnes **paires** !

Le tableau des alias ci-dessous fait apparaître les confusions d'actions du plan d'expériences sur les effets du premier ordre.

Action du modèle	Colonnes	Alias
A	3	-
B	5	-
C	9	-
D	13	-
E	15	-

A partir de la nouvelle table à 16 essais, les effets du premier ordre ne sont plus aliassés avec des effets du second ordre. Dans l'hypothèse où les interactions d'ordre III ou plus sont négligeables, on identifie avec une bonne précision les effets principaux des facteurs.

Les seules confusions d'actions qui restent sont :

Colonne 6 - $AB + CE$.

Colonne 10 - $AC + BE$.

Colonne 12 - $BC + AE$.

Les interactions CD , DE , BD , AD peuvent être calculées sans ambiguïté.

13. Minimisation des risques

Le lecteur aura compris que les plans fractionnaires offrent d'énormes avantages sur la démarche traditionnelle, mais qu'ils possèdent un risque d'obtenir des résultats erronés si on néglige des interactions fortes qui sont alors alias avec un facteur.

Pour limiter les risques, nous avons précisé qu'il était préférable d'utiliser des graphes de résolution IV pour la table L_{16} de préférence aux graphes proposés par Taguchi. La méthode que nous venons de décrire pour désaliasser un plan L_8 permet de composer des plans comportant des risques importants, tout en se réservant la possibilité de lever le doute par un essai complémentaire.

Pour illustrer notre propos, prenons l'exemple de la construction du plan suivant :

Réponse à améliorer

L'objectif du plan d'expériences est d'améliorer la qualité d'un dépôt.

Facteurs principaux étudiés

	Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
A	Préparation du support	support standard	nouveau support
B	Granulométrie de la poudre	2	5
C	PH du substrat	mini	maxi
D	Concentration	standard	augmentée
E	Temps de contact substrat	T	2 x T
F	Gamme de fabrication (lavage)	standard	sans lavage

Interactions supposées entre les facteurs principaux

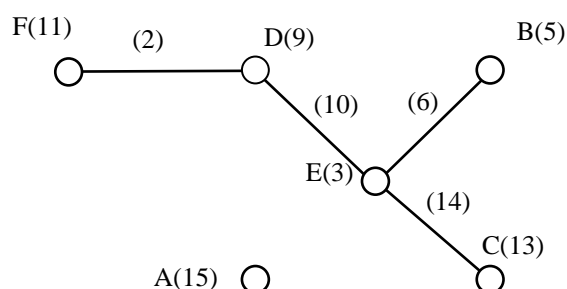
	A Support	B Granulo	C PH	D Concent	E Contact	F Gamme
A Support	*					
B Granulo	N	*				
C PH	?	N	*			
D Concent	N	N	N	*		
E Contact	N?	O	O?	?	*	
F Gamme	N	N	N	?	N	*

Conception du plan d'expériences

Chaque essai demande une semaine pour sa réalisation. Afin d'avoir des résultats le plus rapidement possible, nous nous orientons vers une table à 8 essais, malgré le peu de connaissances *a priori* sur les interactions. Le plan se décomposera en deux étapes. La première étape en 8 essais pour déterminer l'influence des facteurs les plus significatifs en faisant l'hypothèse que les interactions sont faibles devant les facteurs sauf l'interaction *BE* qui a fait l'unanimité du groupe de travail. Une seconde étape de 8 essais complémentaires pourra être réalisée pour compléter le premier plan si on met en évidence que les interactions sont plus importantes que supposées.

Recherche du plan d'expériences principal à 16 essais

Graphe du modèle recherché après les 16 essais :



Ce schéma permet d'affecter les colonnes en utilisant uniquement des colonnes impaires pour avoir un plan de résolution IV. Le choix des colonnes est réalisé pour permettre l'étude de l'interaction *BE* dans le premier plan de 8 essais.

	15	5	13	9	3	11
N°	A Support	B Granul	C PH	D Concent	E Contact	F Gamme
1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	2
3	2	2	2	1	1	1
4	1	2	1	2	1	2
5	2	1	1	1	2	2
6	1	1	2	2	2	1
7	1	2	2	1	2	2
8	2	2	1	2	2	1
9	2	2	2	2	2	2
10	1	2	1	1	2	1
11	1	1	1	2	2	2
12	2	1	2	1	2	1
13	1	2	2	2	1	1
14	2	2	1	1	1	2
15	2	1	1	2	1	1
16	1	1	2	1	1	2

Pour la réalisation du premier plan, on extrait les 8 premières lignes de ce plan. L'interaction *BE* se retrouve dans la colonne 3, elle peut donc être étudiée.

	7	2	6	4	1	5	3
N°	A	B	C	D	E	F	BE
	Support	Granul	PH	Concent	Contact	Gamme	
1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	1	2	2	1	2	1
3	2	2	2	1	1	1	2
4	1	2	1	2	1	2	2
5	2	1	1	1	2	2	2
6	1	1	2	2	2	1	2
7	1	2	2	1	2	2	1
8	2	2	1	2	2	1	1

Le tableau des alias de cette première série d'essais est le suivant :

Actions	Alias	
A	BF	CE
B	CD	AF
C	BD	AE
D	BC	EF
E	DF	AC
F	AB	DE
BE	AD	CF

Comme on peut le constater, ce plan comporte de nombreux risques. Cependant, si on trouve à l'issue de cette première série d'essais que le modèle n'est pas conforme, il sera toujours possible de continuer les huit essais suivants pour déterminer sans ambiguïté tous les facteurs et de nombreuses interactions.

Chapitre 5

Les plans produits

1. L'ingénierie de la qualité selon le Dr Taguchi

1.1. Les apports fondamentaux du Dr Taguchi

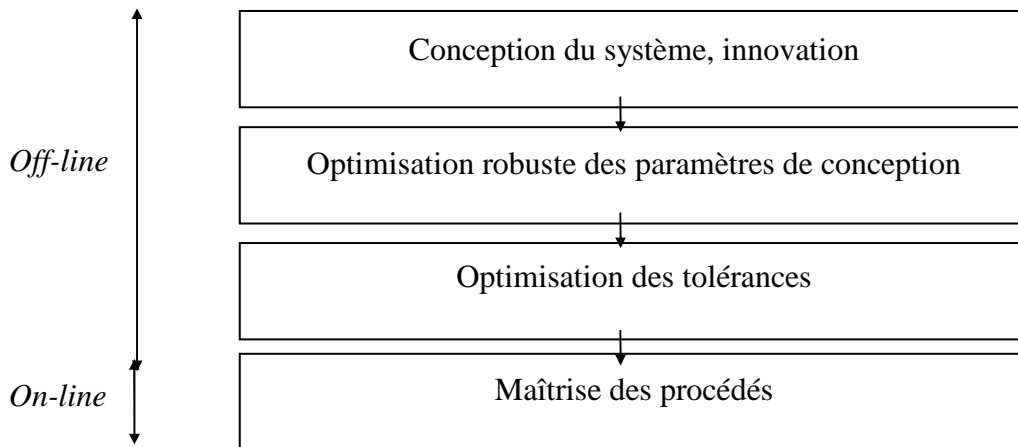
Parmi l'ensemble des travaux du Dr Taguchi qui sont aujourd'hui largement diffusés, les plans produits que nous allons développer dans ce chapitre tiennent une place de choix. En fait, ils représentent l'aboutissement des concepts énoncés par Taguchi. Le but de cet ouvrage n'est pas de rentrer dans le détail de l'ensemble de ces concepts, mais il nous semble important de rappeler les notions fondamentales sur lesquelles repose l'utilisation des plans produits.

Le concept de base de l'ensemble de la philosophie est fondé sur le concept suivant :

Un produit sera d'une conception d'autant plus "**robuste**" que la "**perte**" pour la société sera faible même en présence de "**bruits**".

La première notion sera la fonction perte qui permet une analyse économique de la "**perte**" subie par la "Société" en cas de non-qualité et plus particulièrement d'écart par rapport à la valeur cible. Nous introduirons ensuite la notion de "**bruits**" qui explique l'origine de ces dispersions. Enfin, nous parlerons de la notion de "**robustesse**" fondamentale chez Taguchi.

Pour étudier de façon optimale un produit ou un processus de fabrication, Taguchi propose une démarche qualité qui sépare les méthodes de qualité "*off-line*" (hors production) et les méthodes de qualité "*on-line*" (sur la ligne de production). La démarche proposée suit la logique suivante :



L'étape de conception du système permet de définir les objectifs à tenir par le bureau d'études. Elle a également pour objectif de jeter les fondements des innovations qui feront le cœur du produit.

L'étape d'optimisation est plus liée au sujet de cet ouvrage. En effet, Taguchi préconise l'utilisation à une large échelle des plans d'expériences pour définir les paramètres de conception qui permettront d'atteindre les objectifs de l'étape 1 au moindre coût. L'originalité de l'approche de Taguchi réside dans le type de plans d'expériences choisis pour faire cette optimisation. On prendra des plans d'expériences "produits" pour optimiser le système malgré les facteurs bruits afin de le rendre robuste.

L'optimisation des tolérances constitue la troisième étape de la démarche. Cette optimisation est réalisée à partir de la fonction "perte", afin de réaliser le meilleur compromis entre le coût du produit et sa fonctionnalité attendue.

Enfin, la dernière étape permet de maîtriser les processus de fabrication avec toujours le même objectif d'obtenir le meilleur niveau de qualité pour un coût minimum.

Pour chacune de ces étapes, Taguchi a innové en mettant au point de nombreux concepts et outils permettant de répondre aux objectifs. Nous étudierons dans ce chapitre un de ces outils, le plan produit.

1.2. Notion de fonction perte

1.2.1. Cas des critères bilatéraux

Dans la plupart des entreprises, nous considérons qu'un produit est bon à l'intérieur des tolérances, mauvaise à l'extérieur, sans différence de nuance. En suivant ce raisonnement, un système de tri automatique éliminant systématiquement les pièces hors tolérances permettrait d'obtenir une production considérée comme parfaite.

Pourtant si l'on considère la figure 5.1, quelle est la différence entre les pièces 1 et 2 en terme de coût de non-qualité ? Surtout si l'intervalle de tolérance a été fixé de façon arbitraire. Quelle est également la différence entre les pièces 2 et 3 ?

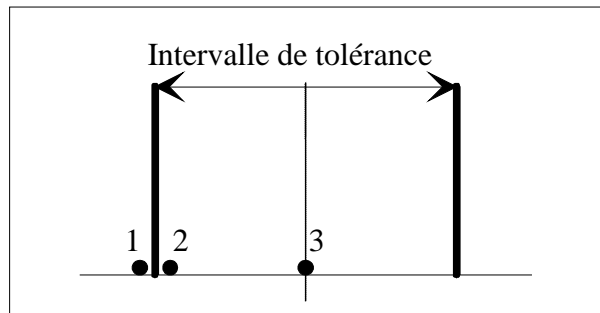


Figure 5.1 - Écart par rapport à la nominale et coût

Il est évident que la pièce n°3 permettra un fonctionnement parfait et n'engendrera pas de coût de non-qualité. Il n'en est pas de même pour la pièce n°2. Nous considérons cependant que la pièce 2 est classée avec la pièce 3 alors qu'à l'évidence elle est beaucoup plus proche de la pièce 1.

Prenons par exemple un produit dans lequel le fonctionnement dépend de l'assemblage d'un axe avec l'alésage (figure 5.2). La situation idéale d'assemblage est réalisée lorsque les caractéristiques de l'arbre et de l'alésage sont sur la cible. Dès qu'une des caractéristiques s'éloigne de la cible, la qualité de l'assemblage risque de se dégrader.

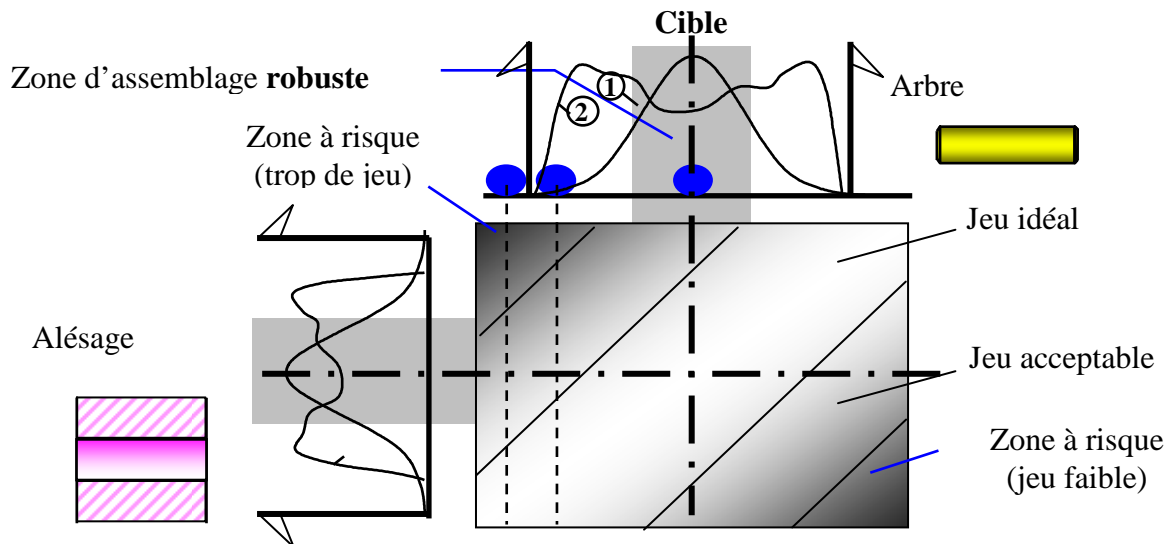


Figure 5.2 - Assemblage arbre/alésage

En fait, la perte due à l'écart d'une caractéristique par rapport à une valeur nominale n'est pas nulle à l'intérieur de la tolérance pour se dégrader brutalement dès que l'on franchit la tolérance. On peut facilement considérer que la perte est nulle lorsque la caractéristique est égale à la cible, et croît lorsque la caractéristique s'éloigne de celle-ci. Le Dr Taguchi définit la fonction perte (figure 5.3) comme étant une fonction du second degré dans le cas où la caractéristique doit suivre une nominale.

Elle s'écrit	$L = K (Y - Y_0)^2$
--------------	---------------------

avec :

- K une constante qui dépend du problème posé ;
- Y_0 valeur nominale recherchée ;
- Y valeur prise par la caractéristique.

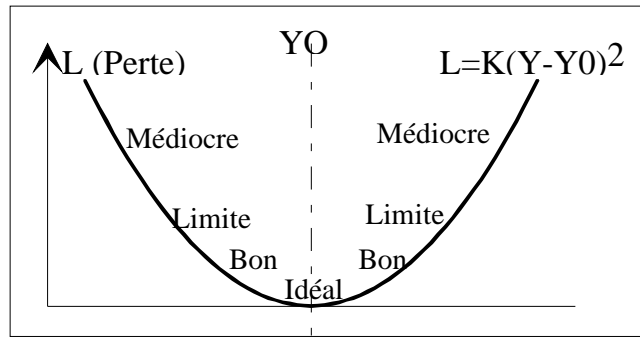


Figure 5.3 - Fonction perte de Taguchi

Origine de la fonction perte

Cette fonction est en fait le développement de Taylor en éliminant les termes d'ordre supérieur à 3 et en considérant les hypothèses suivantes :

- la perte est nulle pour $Y = Y_0$ soit $L(Y_0) = 0$;
- la perte est minimale pour $Y = Y_0$ soit $L'(Y_0) = 0$.

Le développement limité de la fonction perte au voisinage de la cible s'écrit :

$$L(Y) = L(Y_0) + (Y - Y_0)L'(Y_0) + \frac{(Y - Y_0)^2}{2!}L''(Y_0) + \varepsilon$$

$$\swarrow = 0$$

$$\swarrow = 0$$

$$\text{Nous obtenons } L(Y) = \frac{L''(Y_0)}{2!}(Y - Y_0)^2 = K(Y - Y_0)^2$$

Cette fonction perte est très intéressante pour plusieurs raisons :

- connaissant la valeur d'une caractéristique, il est enfin possible, grâce à cette fonction perte, de chiffrer le coût de non-qualité engendré ;
- la fonction perte ne possédant qu'une inconnue (K), son calcul est possible dès que l'on connaît un point sur la courbe.

1.2.2. Perte dans le cas d'un échantillon

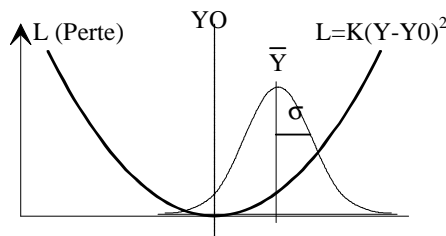


Figure 5.4 - Perte dans le cas d'un échantillon

A partir de la définition de la fonction perte, il est intéressant de connaître la perte moyenne par pièce dans le cas d'un échantillon d'écart-type σ et de moyenne \bar{Y} .

On trouve

$$\bar{L} = K(\sigma^2 + (\bar{Y} - Y_0)^2)$$

Avec

- \bar{L} : perte moyenne par pièce ;
- σ : écart-type de l'échantillon ;
- \bar{Y} : moyenne de l'échantillon ;
- Y_0 : valeur cible.

Démonstration

$$\begin{aligned}\bar{L} &= \frac{1}{n} \sum K(Y_i - Y_0)^2 = \frac{K}{n} \sum (Y_i - \bar{Y} + \bar{Y} - Y_0)^2 \\ &= \frac{K}{n} \sum (Y_i - \bar{Y})^2 + \sum (\bar{Y} - Y_0)^2 + 2 \underbrace{\sum (Y_i - \bar{Y})(\bar{Y} - Y_0)}_{=0} \\ \bar{L} &= K \left[\sum \frac{(Y_i - Y_0)^2}{n} + (\bar{Y} - Y_0)^2 \right]\end{aligned}$$

Remarque importante : la démonstration du calcul de la fonction perte dans le cas d'un échantillon ne suppose pas la normalité de la population.

Bien sûr, certains diront que la fonction perte est une estimation grossière de la réalité, mais Valéry disait déjà « Tout ce qui est simple est faux, tout ce qui est compliqué est inutilisable. » La fonction perte nous semble être un bon compromis.

1.2.3. Détermination de la fonction perte

Exemple 1

On désire connaître la fonction perte pour une caractéristique importante pour le bon fonctionnement d'un appareil electro-pneumatique. Il s'agit d'un diamètre de valeur nominale 14,90 mm.

Pour déterminer la fonction perte $L = K(Y - Y_0)^2$, il suffit de déterminer K à partir d'un point où l'on connaît la perte engendrée.

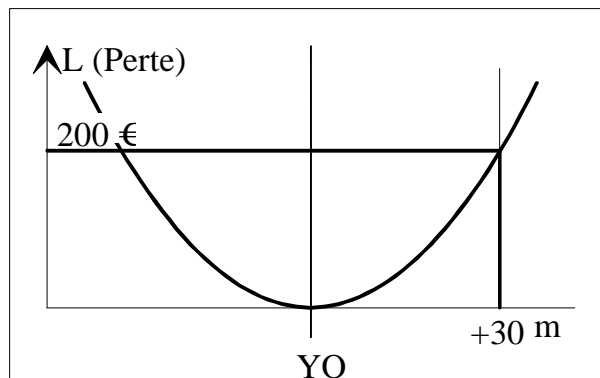


Figure 5.5 - Calcul de la fonction perte

Pour cette pièce, nous avons considéré que l'appareil aurait de graves déficiences de fonctionnement si l'écart par rapport à la nominale était égal à 30 μ . Dans ce cas, nous avons évalué la perte pour la

société au coût de l'appareil soit 200 € (figure 55). Précisons que cette évaluation est une minimisation de la perte, car elle ne tient pas compte des frais de port pour échange standard, de la dégradation de l'image de marque pour la société...

Pour $Y - Y_0 = 30$ $200 = K(30)^2$ soit $K = \frac{200}{30^2} = 0,22$

La fonction perte s'écrit alors: $L = 0,22.(Y - Y_0)^2$. (Figure 5.5)

Calcul de la tolérance

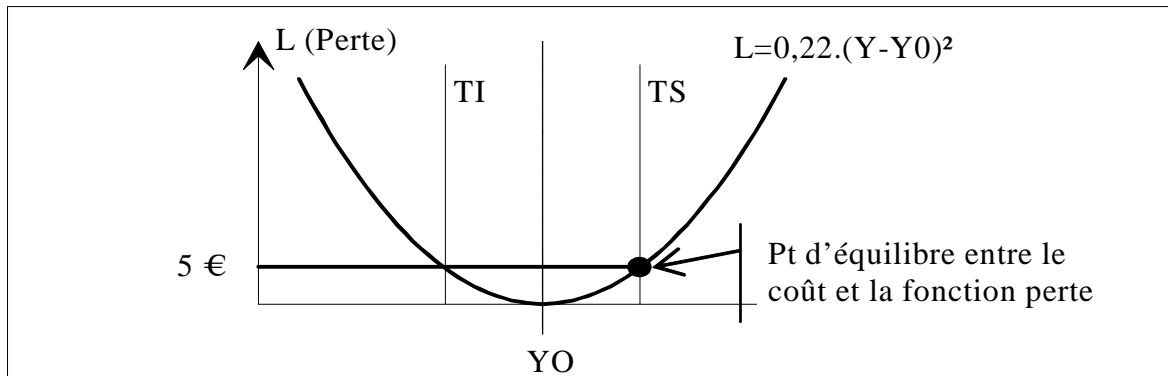


Figure 5.6 - Détermination de la tolérance

Dans le cas considéré, il est facile de mettre en place un contrôle à 100% de la production. Dans le cas où la pièce est hors tolérance, le coût de non-qualité est égal au coût de la pièce à ce stade de la fabrication soit 5 €. Mais quel doit être l'intervalle de tolérance ?

On peut définir celui-ci comme étant l'équilibre entre le coût généré en cas de décision de rebuter la pièce, et le coût qui résulterait de son montage dans le système (figure 5.6).

On écrit :

$$5 = 0,22(Y - cible)^2 \text{ soit } y - cible = \pm \sqrt{\frac{5}{0,22}} = 4,76 \text{ soit environ } 0,005.$$

La tolérance sera donc fixée à $14,90 \pm 0,005$.

1.3. Fonction perte dans le cas où l'optimum est un minimum

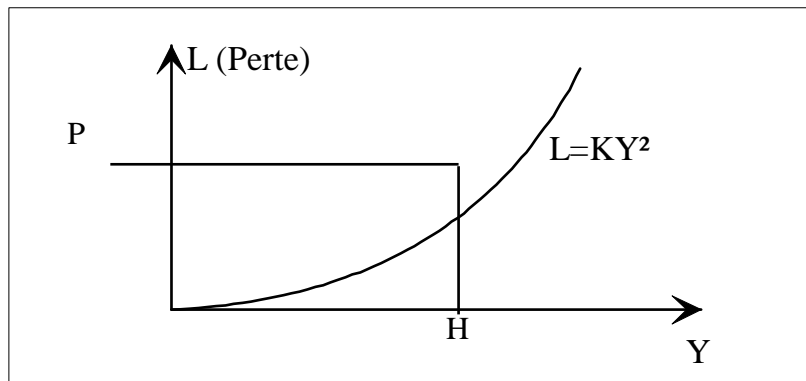


Figure 5.7 - Fonction perte dans le cas où l'optimum est un minimum

Dans le cas où l'optimum est un minimum, la fonction perte sera différente du cas précédent où l'optimum est le nominal. Dans le cas où la réponse est toujours positive, l'idéal est de zéro. Si Y est la valeur prise par la réponse, la fonction perte s'écrira dans ce cas :

$$L=K.Y^2$$

La constante K se calcule comme précédemment. Si on note H la limite de la tolérance, et P la perte subie lorsqu'un produit est en limite de tolérance, la constante K est alors telle que :

$$K = \frac{P}{H^2}$$

Perte dans le cas d'un échantillon

On montre facilement que dans le cas d'un échantillon de moyenne \bar{Y} et d'écart-type σ on a comme perte moyenne :

$$L = K.(\bar{Y}^2 + \sigma^2)$$

1.4. Fonction perte dans le cas où l'optimum est un maximum

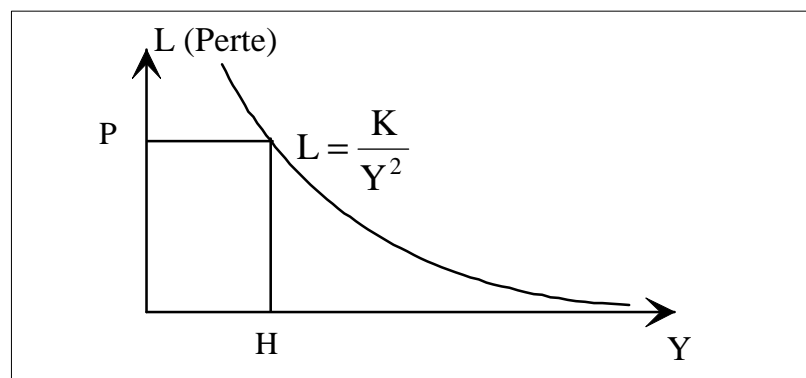


Figure 5.8 - Fonction perte dans le cas où l'optimum est un maximum

Si nous restons dans le cas où la réponse est toujours positive, l'idéal, dans le cas où l'optimum est un maximum est qu' Y soit égal à l'infini. Dans ce cas, la fonction perte sera définie par la relation :

$$L = \frac{K}{Y^2}$$

La détermination de la constante K est également très simple dans ce cas. Si nous connaissons la perte subie (P) lorsqu'on se trouve en limite de tolérance (H), nous aurons alors la relation :

$$P = K/H^2 \text{ d'où il vient immédiatement } K = P \cdot H^2$$

Perte moyenne dans le cas d'un échantillon

On montre que dans le cas d'un échantillon de moyenne \bar{Y} et d'écart-type σ on a comme perte moyenne :

$$L = \frac{K}{\bar{Y}^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$$

Démonstration

Soit \bar{Y} la moyenne des Y_i

$$\bar{L} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{Y_i^2} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{(Y_i + \bar{Y} - \bar{Y})^2} = \frac{1}{n} \sum \frac{1}{\bar{Y}^2 \cdot \left(\frac{Y_i + \bar{Y} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right)^2}$$

$$\bar{L} = \frac{1}{n\bar{Y}^2} \sum \left[\frac{Y_i + \bar{Y} - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right]^{-2} = \frac{1}{n\bar{Y}^2} \sum \left[1 + \frac{Y_i - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right]^{-2}$$

Pour simplifier cette écriture, on utilise le développement limité de :

$$(1+x)^n \approx 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2} x^2 + \varepsilon \quad \text{soit} \quad (1+x)^{-2} \approx 1 - 2x + 3x^2 + \varepsilon$$




$$\bar{L} = \frac{1}{n\bar{Y}^2} \sum \left[1 - 2 \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right) + 3 \left(\frac{Y_i - \bar{Y}}{\bar{Y}} \right)^2 \right]$$

$$\bar{L} = \frac{1}{\bar{Y}^2} \left[\sum \frac{1}{n} - \frac{2}{n\bar{Y}} \sum (Y_i - \bar{Y}) + \frac{3}{\bar{Y}^2} \sum \frac{(Y_i - \bar{Y})^2}{n} \right]$$

$\swarrow \quad \quad \quad \swarrow \quad \quad \quad \swarrow$
 $\quad \quad \quad =1 \quad \quad \quad =0 \quad \quad \quad =\sigma^2$

$$\text{d'où } L = \frac{K}{\bar{Y}^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$$

1.5. Résumé

Type	Graphe	Perte par produit	Perte moyenne
Cible		$L = K (Y - Y_0)^2$	$\bar{L} = K(\sigma^2 + (\bar{Y} - Y_0)^2)$
Mini		$L = K \cdot Y^2$	$L = K \cdot (\bar{Y}^2 + \sigma^2)$
Maxi		$L = \frac{K}{Y^2}$	$L = \frac{K}{\bar{Y}^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$

1.6. Notion de bruit

Si nous analysons l'ensemble des paramètres agissant sur un système, nous pouvons les classer en trois catégories (figure 5.9) qui sont :

- les paramètres d'entrées ;
- les paramètres de pilotage ;
- les paramètres de perturbation.

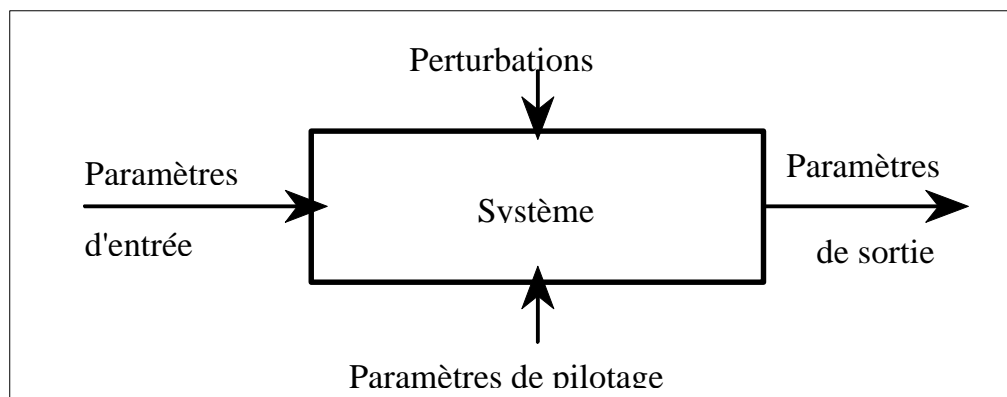


Figure 5.9 - Classification des paramètres

Pour illustrer cette classification, nous allons prendre le cas d'une machine destinée à transformer des produits, pilotée par un opérateur.

- **Les paramètres d'entrée** représentent les produits avant transformation.
- **Les paramètres de pilotage** sont ceux qui permettent de maîtriser le système. Ce sont les instruments de pilotage de l'opérateur dans le cas d'une machine.
- **Les paramètres de perturbation** sont tous ceux qui interviennent sur le procédé indépendamment de la volonté du régleur. C'est le cas de la température extérieure, des vibrations ambiantes...

L'ensemble de ces paramètres n'est malheureusement pas stable. Il existe des variations dans le temps sur l'ensemble de ces paramètres. Ainsi dans le cas de notre machine, les produits avant transformation ne sont pas tous parfaitement identiques. De même avec le temps, une consigne ne donnera pas toujours le même résultat du fait de l'usure de la machine. Taguchi appelle ces perturbations des "bruits".

Ces "bruits" peuvent se partager en trois types principaux :

- **Les bruits intérieurs** : il s'agit des variations dues à l'utilisation du système telles que l'usure, le dérèglement... Ils représentent les variations sur les paramètres de pilotage.
- **Les bruits extérieurs** : il s'agit des perturbations indépendantes du système telles que la température, les vibrations... Ils représentent les paramètres de perturbation.
- **Les bruits entre produits** : ces bruits correspondent aux différences qui existent entre deux produits d'une même production dues aux dispersions d'usinage par exemple. Ils représentent les variations sur les paramètres d'entrées.

La traduction de ces bruits en terme de fonctionnement se fera sous la forme de dispersion plus ou moins grande dans le fonctionnement du système. Un système sera d'autant plus «robuste» que cette dispersion de fonctionnement sera faible.

1.7. Notion de robustesse

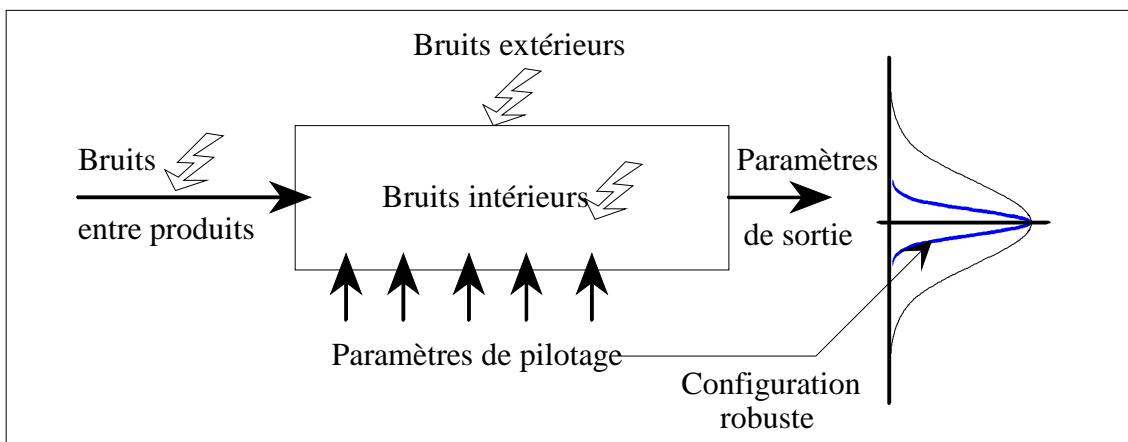


Figure 5.10 - Robustesse d'une solution

Un point fort dans l'ingénierie de la qualité selon Taguchi est cette notion de robustesse. Un produit sera robuste, si sa qualité n'est pas remise en question par des facteurs extérieurs non contrôlés, comme la température ou les vibrations. Il n'est pas suffisant qu'un produit fonctionne bien en laboratoire, il faut qu'il fonctionne bien dans un environnement bruité qui sera le sien lors de son utilisation quotidienne. La robustesse d'un produit est donc un élément-clé de sa qualité.

Lorsque le concepteur choisit les valeurs nominales des facteurs d'un produit ou d'un système, il importe de les fixer selon une double optimisation :

- fonctionnement optimal du système ;
- robustesse des résultats.

Trop souvent, nous négligeons l'optimisation en robustesse. Nous concevons alors des produits de laboratoire qui ont du mal à fonctionner correctement dans un environnement bruité. Dans le cas de la figure 5.10, la configuration des facteurs de pilotage la plus robuste sera la configuration qui minimise l'influence des différents bruits agissant sur le système. La variance des paramètres de sortie sera plus faible, le système sera rendu insensible aux bruits.

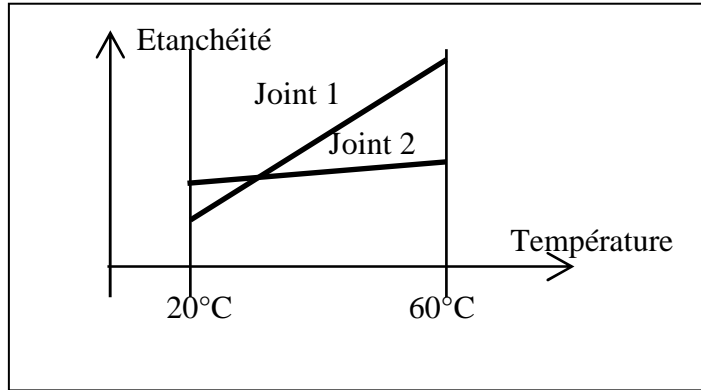


Figure 5.11 - Interaction joint/température

Par exemple, si nous étudions l'étanchéité d'un système par joint, celle-ci doit être effective quelles que soient les conditions extérieures telles que la température, le niveau vibratoire... Il faut donc choisir le joint qui élimine l'effet des facteurs extérieurs. Pour cela, on va utiliser les interactions entre les facteurs de pilotage et les facteurs bruits. En effet, dans le cas de la figure 5.11, on note que le joint 2 donne un fonctionnement plus robuste, l'étanchéité est moins sensible aux variations de température qu'avec le joint 1.

Pour trouver la configuration robuste, Taguchi propose de séparer les facteurs en deux catégories :

- les facteurs pilotables (principaux) ;
- les facteurs bruits.

Par une combinaison originale de deux plans d'expériences, on va chercher à étudier de façon globale toutes les interactions entre les facteurs principaux et les facteurs bruits. Taguchi nous propose d'optimiser le système non seulement en position mais également en dispersion par l'utilisation d'un indicateur signal sur bruit. L'optimisation de cet indicateur assurera non seulement le fonctionnement optimal du système, mais également la robustesse de cette solution face aux facteurs bruits.

Pour illustrer ce principe, prenons deux combinaisons de facteurs principaux et deux facteurs bruits. Pour chacune des combinaisons, nous répétons les essais pour toutes les combinaisons des facteurs bruits.

A	B	C	Facteurs bruits R et S				Moyenne	Ecart-type
			11	12	21	22		
2	1	1	6	10	8	16	10	3,74
1	2	2	9	10	10	11	10	0,71

La combinaison 1 2 2 est la plus robuste, car les valeurs sont beaucoup moins dispersées que pour la combinaison 2 1 1. Il y a donc interaction entre les facteurs principaux ABC et les facteurs bruits RS puisque l'on minimise l'effet de R et S par une configuration des facteurs ABC .

On note l'intérêt de cette présentation qui permet d'optimiser globalement le procédé sans avoir à calculer et à déterminer les interactions entre les facteurs principaux et les facteurs bruits.

Cette notion de robustesse face aux facteurs bruits est extrêmement riche, et doit être appliquée à chaque développement de produits nouveaux.

2. Les plans produits

2.1. Origine des plans produits du Dr Taguchi

Pour étudier cette sensibilité des systèmes aux facteurs bruits, Taguchi propose d'utiliser des plans produits dans lesquels on distinguera les facteurs contrôlés (ceux qui pilotent le système) des facteurs bruits (ceux que l'on subit). On construira deux plans d'expériences : un pour les facteurs contrôlés (le plan principal), un second pour les facteurs bruits (le plan bruit). Le plan produit consistera à répéter les expériences du plan principal pour chaque configuration apparaissant dans le plan bruit. Cette présentation originale permet, grâce à l'utilisation du rapport signal/bruit proposé par Taguchi, de réaliser la double optimisation qui permettra d'obtenir des systèmes qui fonctionnent de façon optimum, même dans un environnement bruité.

2.2. Construction d'un plan produit

Soit un système répondant à trois facteurs de pilotage (pression, température de régulation, temps) que nous appellerons A , B , C , et trois facteurs bruits (hygrométrie, température extérieure, fournisseur) R , S , T . L'ensemble de ces facteurs sont à 2 niveaux.

Le modèle du plan principal, si l'on ne conserve que les facteurs principaux, s'écrit :

$$Y \sim = M + A + B + C$$

Pour valider l'hypothèse d'absence d'interaction, nous retiendrons le plan complet comportant 8 essais.

Plan principal :

N°	A	B	C
1	1	1	1
2	1	1	2
3	1	2	1
4	1	2	2
5	2	1	1
6	2	1	2
7	2	2	1
8	2	2	2

Pour étudier l'influence des facteurs bruits, nous allons construire un plan d'expériences P2. Les facteurs bruits étant à deux niveaux, le plan bruit sera tiré de la table L_4 .

Plan bruit

N°	R	S	T
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1

Nous pouvons alors définir un plan P qui sera le produit des plans P1 et P2. Ce plan sera obtenu en établissant un tableau croisé entre les plans P1 et P2, qui donnera lieu à une expérience pour chaque combinaison P1 et P2.

Le plan produit s'écrit donc :

N°	A	B	C					Moyennes	Variances	
				1	2	3	4			
				R	1	1	2	2		
				S	1	2	1	2		
				T	1	2	2	1		
1	1	1	1	Y ₁₁	Y ₁₂	Y ₁₃	Y ₁₄	MI ₁	σ ₁ ²	
2	1	1	2	Y ₂₁	Y ₂₂	Y ₂₃	Y ₂₄	MI ₂	σ ₂ ²	
3	1	2	1	Y ₃₁	Y ₃₂	Y ₃₃	Y ₃₄	MI ₃	σ ₃ ²	
4	1	2	2	Y ₄₁	Y ₄₂	Y ₄₃	Y ₄₄	MI ₄	σ ₄ ²	
5	2	1	1	Y ₅₁	Y ₅₂	Y ₅₃	Y ₅₄	MI ₅	σ ₅ ²	
6	2	1	2	Y ₆₁	Y ₆₂	Y ₆₃	Y ₆₄	MI ₆	σ ₆ ²	
7	2	2	1	Y ₇₁	Y ₇₂	Y ₇₃	Y ₇₄	MI ₇	σ ₇ ²	
8	2	2	2	Y ₈₁	Y ₈₂	Y ₈₃	Y ₈₄	MI ₈	σ ₈ ²	
Moyennes				Mc ₁	Mc ₂	Mc ₃	Mc ₄	M		

Notations utilisées :

- Y_{52} Réponse du système lorsque $A = 2, B = 1, C = 1, R = 1, S = 2, T = 2$;
- Mc_2 Moyenne de la colonne 2 des Y ;
- MI_3 Moyenne de la ligne 3 des Y ;
- σ_3^2 Variance des résultats de la troisième ligne des Y .

La variance (carré de l'écart-type) de la ligne i dans le cas où il y aurait n colonnes se calcule par la formule :

$$\sigma_i^2 = \frac{(Y_{i1} - MI_i)^2 + (Y_{i2} - MI_i)^2 + \dots + (Y_{in} - MI_i)^2}{n}$$

On remarque que ce plan consiste à répéter le plan d'expériences P1 sous différentes configurations de facteurs bruits.

L'objectif étant de minimiser l'influence des facteurs bruits, on s'aperçoit qu'un plan produit revient à étudier toutes les interactions entre les facteurs principaux et les facteurs bruits. Si une configuration de facteurs principaux est sensible aux bruits, les réponses de la ligne correspondante auront une variance très forte. Par contre, si une configuration est très robuste aux bruits, les réponses de la ligne auront une variance très faible.

L'inconvénient évident de ce type de plan est le nombre très élevé d'expériences qu'il nécessite. Le plan ci-dessus impose la réalisation de $8 \times 4 = 32$ expériences. Mais on verra que l'on peut minimiser cet inconvénient.

On retiendra, comme configuration optimale, celle qui donnera le meilleur résultat tout en n'étant pas trop influencée par les facteurs bruits. Cependant, cette optimisation n'est pas simple, car il faut à la fois optimiser le système en position et en dispersion. La figure 5.12 illustre la difficulté de cette optimisation dans le cas de recherche de minima et dans le cas de recherche de cible. Quelle est pour les deux situations la configuration optimale ? Faut-il mieux être centré avec une dispersion forte ou décentré mais avec une faible dispersion ?

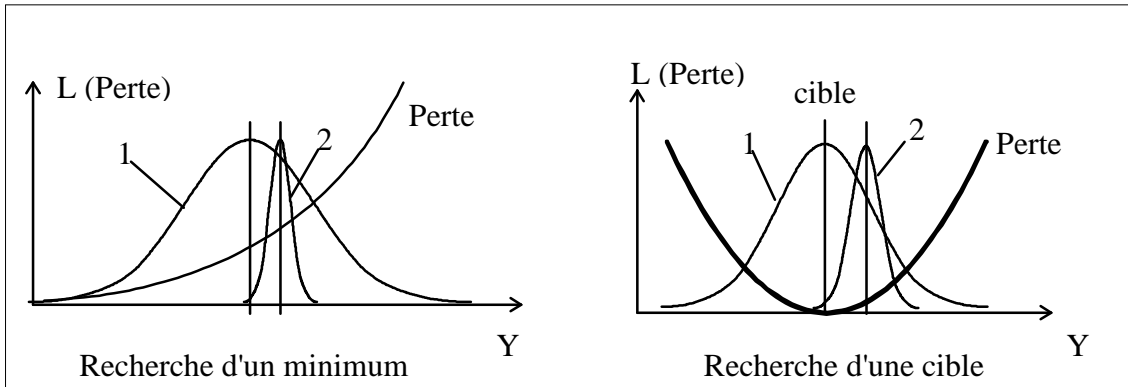


Figure 5.12 - Double optimisation position/dispersion

Pour simplifier cette optimisation, Taguchi propose de calculer un ratio Signal/Bruit qui donne la solution optimale.

3. Rapport Signal/Bruit

3.1. Notions de base

La conception d'un système robuste consiste à concevoir celui-ci de telle sorte qu'il soit le plus possible insensible aux bruits. La traduction de ces bruits en terme de fonctionnement se fera sous la forme de dispersions plus ou moins grandes dans le fonctionnement du système. Un système sera d'autant plus "**robuste**" que cette dispersion de fonctionnement sera faible.

La double optimisation consiste à positionner la réponse à la valeur souhaitée, en faisant en sorte que la dispersion autour de cette valeur soit la plus faible possible. Certains facteurs sont efficaces sur le niveau pris par la réponse, d'autres agissent plus sur la dispersion de celle-ci notamment par le biais d'interactions entre les facteurs principaux et les facteurs bruits. La figure 5.13 représente la réponse obtenue en fonction de deux facteurs A et B . Le facteur A agit sur le niveau de la réponse, par contre, le facteur B agit sur la dispersion.

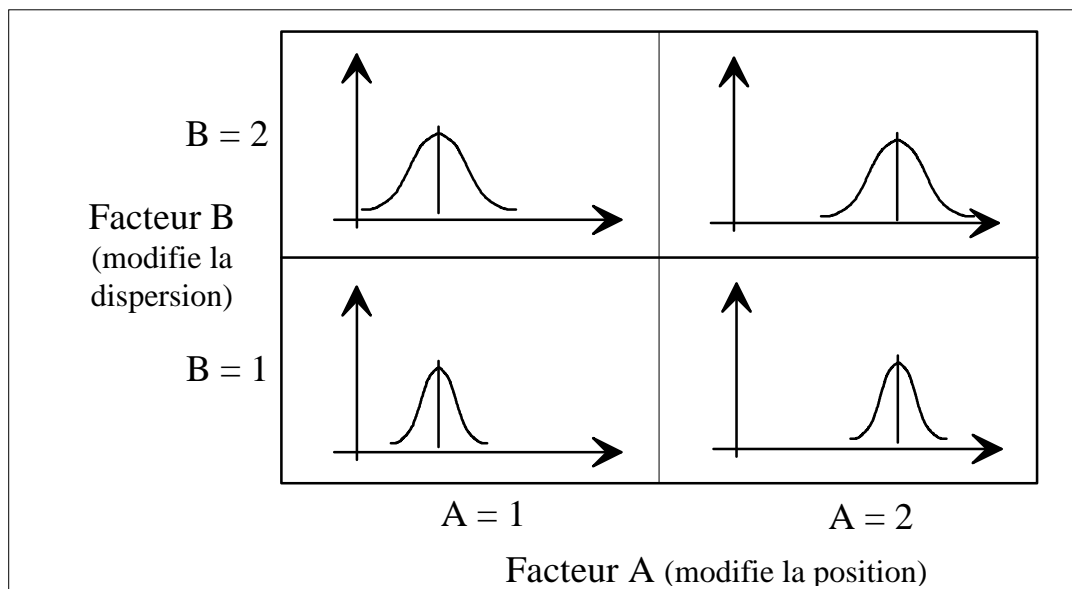


Figure 5.13 - Influence en moyenne et dispersion

L'optimisation d'un procédé - dans le cas d'une recherche de nominale - soumis à ces deux facteurs consistera à:

- figer le facteur B au niveau 1 pour diminuer la dispersion (le rendre plus robuste) ;
- positionner A de façon à obtenir la nominale recherchée.

Le rapport Signal/Bruit établit un rapport entre le signal (la moyenne de la réponse) et le bruit (la dispersion de la réponse en fonction du bruit). Ce rapport sera optimum lorsque la perte engendrée sera minimum. En fait, le rapport Signal/Bruit mesure la manière dont sont affectées les performances d'un procédé par les facteurs bruits.

Le rapport Signal/Bruit permet de déterminer les paramètres de pilotage de telle sorte qu'ils minimisent la perte engendrée par les bruits extérieurs. Il permet donc une conception robuste dans les termes où Taguchi entend cette notion.

3.2. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est un minimum (Type S)

Dans le cas d'une recherche de minima, la fonction perte s'écrit : $L = K.Y^2$.

Pour minimiser la perte, il faut donc minimiser la perte moyenne observée dans une ligne du plan produit. On cherche donc à minimiser la fonction :

$$F = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} Y_{ij}^2 \quad \text{avec } n, \text{ le nombre de colonnes dans le plan produit.}$$

Plutôt que de calculer directement cette fonction, Taguchi propose de calculer la fonction suivante :

$$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} Y_{ij}^2 \right] = -10 \log [\sigma^2 + \bar{Y}^2]$$

Avec

- v_i : rapport Signal/Bruit pour la ligne i ;
- n : nombre de colonnes ;
- Y_{ij} : réponse pour la ligne i et la colonne j .
- Le logarithme permet de linéariser la réponse, afin d'être plus additive.
- Le 10 permet de se ramener à des décibels dont l'amplitude est directement liée à la perte engendrée. On verra qu'un gain de 3 dB correspond à une diminution de moitié de la fonction perte.
- Le signe permet de simplifier l'interprétation, on cherchera toujours à **maximiser le ratio Signal/Bruit (S/N)**.

3.3. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est un maximum (Type L)

Dans ce cas, la fonction perte s'écrit : $Y = \frac{K}{Y^2}$.

C'est le cas où nous souhaitons que la réponse soit maximale, comme, un rendement ou une puissance. Dans ce cas, également nous pouvons définir un ratio Signal/Bruit en décibel qui minimise la fonction perte :

$$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{Y_{ij}^2} \right) \right] = -10 \log \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left(1 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$$

Avec

- v_i : rapport Signal/Bruit pour la ligne i ;
- n : nombre de colonnes ;
- Y_{ij} : réponse pour la ligne i et la colonne j .

3.4. Rapport Signal/Bruit dans le cas où l'optimum est une nominale

3.4.1. Type 1 - Ecart-type indépendant de la valeur moyenne

Dans ce cas de figure, on suppose que l'écart-type ne dépend pas de la position. On considère que la sensibilité aux bruits n'est pas proportionnel à la valeur moyenne. On vise une valeur précise, par exemple un fonctionnement d'un moteur à 1250 tours, une force de 250 grammes, etc.

On souhaite en général rentrer dans une tolérance et minimiser la perte moyenne par produit. La fonction perte moyenne pour une ligne s'écrit alors :

$$Y = K.(\sigma^2 + (\bar{Y} - cible)^2)$$

On caractérise une production par un indicateur de capabilité Cpm tel que :

$$Cpm = \frac{Tol\ sup - Tol\ inf}{6\sqrt{\sigma^2 + (\bar{Y} - cible)^2}}$$

Pour optimiser cet indicateur, il faut maximiser la perte moyenne par pièce. Si on suppose la variance relativement indépendante de la position de la moyenne **dans le domaine d'étude**, on trouve comme ratio Signal/Bruit :

$$v_i = -10\log[\sigma^2 + (\bar{Y} - Cible)^2]$$

avec

σ : écart-type de la ligne.

\bar{Y} : moyenne de la ligne.

Un cas particulier intéressant de ce cas de figure est le cas où la cible recherchée est égale à zéro, les valeurs pouvant être positives ou négatives. Dans ce cas, on trouve comme ratio Signal/Bruit :

$$v_i = -10\log[\sigma^2]$$

3.4.2. Type 2 - Ecart-type proportionnel à la position

Dans ce cas plus général, on considère que la dispersion du système est proportionnelle à la valeur moyenne atteinte. La dispersion est faible pour les petites valeurs de la réponse, importante pour les grandes valeurs de la réponse.

Supposons dans ce cas que la réponse moyenne du système soit égale à \bar{Y} , pour ajuster cette réponse sur $Y0$, il faudrait modifier la réponse dans un rapport $Y0/\bar{Y}$. Mais si nous modifions la réponse, il est fort probable que l'écart-type σ sera également modifié dans un rapport identique. Nous aurons alors :

$$\sigma' = \sigma \left(\frac{Y0}{\bar{Y}} \right)$$

Une fois ajustée, la réponse \bar{Y} sera alors égale à $Y0$ et l'écart-type σ sera égal à σ' . Dans ce cas, la fonction perte s'écrit :

$$L = K(\sigma'^2 + (\bar{Y} - Y0)^2) = K \left[\frac{Y0}{\bar{Y}} \sigma \right]^2$$

La valeur recherchée $Y0$ étant une constante, nous pouvons la sortir et nous obtenons :

$$L = K.Y0. \left[\frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right]$$

- Si nous cherchons à minimiser la perte subie, il faut minimiser le rapport σ^2/\bar{Y}^2 ou maximiser le rapport inverse : \bar{Y}^2/σ^2 .
 - Le rapport \bar{Y}^2/σ^2 est sans dimension, il exprime le rapport entre le signal (\bar{Y}^2) et le bruit (σ^2).
- Dans le cas d'un plan produit, il faut calculer le rapport Signal/Bruit pour chaque ligne du plan principal. Avec les notations que nous avons définies au paragraphe 2, nous pouvons exprimer le rapport pour la ligne i du plan :

$$v_i = 10 \log \left(\frac{\bar{Y}_i^2}{\sigma_i^2} \right)$$

Avec

v_i : rapport Signal/Bruit pour la ligne i

σ_i^2 : carré des écart-types des réponses de la ligne i

\bar{Y}_i^2 : carré des moyennes des réponses de la ligne i

Remarque

Ce ratio Signal/Bruit n'est défini que pour les valeurs toujours positives. Lorsque les valeurs peuvent être négatives ou positives, il est préférable de retenir le ratio S/N de type 1.

3.5. Règle d'utilisation du rapport Signal/Bruit (S/N)

Dans tous les cas énoncés précédemment, la règle d'utilisation du ratio Signal/Bruit est identique. **La perte sera d'autant plus faible que le ratio S/N sera grand.** L'optimisation économique d'un système reviendra à configurer les facteurs principaux de telle sorte qu'ils **maximalisent** le ratio S/N.

Attention, le rapport S/N est exprimé en décibel, les effets calculés sont donc petits. Une progression de 3 décibels correspond à une diminution de moitié de la perte moyenne par pièce.

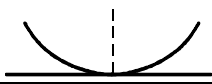

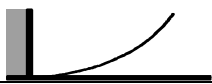

- En effet :
- $v = 10 \log(\text{perte moyenne})$
 - un delta de 3 sur v correspond à :

$$3 = 10 \log [(perte\ ancienne)] - 10 \log [(perte\ nouvelle)]$$

$$3 = 10 \log \left(\frac{perte\ ancienne}{perte\ nouvelle} \right)$$

Soit $\frac{perte\ ancienne}{perte\ nouvelle} = 10^{0,3} = 2$

3.6. Résumé des différentes situations

Type	Graphe	Ratio S/N
Nominal Type 1		$v_i = -10 \log \left[\sum (Y_i - cible)^2 \right] = -10 \log \left[(\bar{Y} - cible)^2 + \sigma^2 \right]$
Nominal Type 2		$v_i = 10 \log \left(\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2} \right)$
Mini		$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} Y_{ij}^2 \right] = -10 \log [\sigma^2 + \bar{Y}^2]$
Maxi		$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{Y_{ij}} \right) \right] = -10 \log \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left(1 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$

Taguchi a détaillé de nombreuses autres situations qui ne seront pas décrites dans cet ouvrage.

4. Méthode d'utilisation des plans produits

L'utilisation des plans produits est particulièrement recommandée lorsque l'objectif de la démarche est de rendre **robuste** un système. C'est le cas en conception de produits ou de procédés dans la phase de détermination des paramètres de fonctionnement.

4.1. Identification des facteurs bruits

La première étape dans la détermination des paramètres est de dissocier les facteurs contrôlés des facteurs bruits.

Les **facteurs contrôlés** sont ceux que le concepteur peut maîtriser, les **facteurs bruits** sont ceux qu'il subit ou qu'il ne veut pas contrôler. Par exemple, il est possible de maîtriser la température d'un atelier. Cependant, la climatisation peut coûter cher, et on ne souhaite pas la contrôler. On préférera trouver une configuration des facteurs de pilotage telle que la température perturbe le moins possible le fonctionnement du système.

L'objectif de l'étude est de diminuer l'influence des facteurs bruits par une configuration optimale des facteurs contrôlés.

4.2. Etablissement du plan produit

Après avoir retenu les facteurs principaux et les facteurs bruits, on établit le plan produit P1 x P2 comme nous l'avons développé au paragraphe 2.

- P1 est le plan des facteurs principaux,
- P2 est le plan des facteurs bruits.

Le plan P1 se construit de façon traditionnelle telle que nous l'avons exposé aux chapitres précédents. Pour le plan P2, cela peut être plus délicat. En effet, les facteurs bruits sont parfois nombreux, et une construction traditionnelle du plan P2 conduirait à un nombre d'essais trop important. Pour réduire la taille du plan P2 trois stratégies peuvent être retenues.

4.2.1. Facteur bruit composé

Dans cette stratégie, on recherche deux configurations extrêmes des facteurs bruits. Supposons que l'étude préalable ait identifié trois facteurs bruits : R, S et T. On détermine en fonction de l'expérience du groupe de travail comment regrouper les facteurs bruits pour avoir un effet maximal. On peut également réaliser un petit plan d'expériences (L_4) pour identifier les conditions extrêmes.

N°	R	S	T	Y
1	1	1	1	5
2	1	2	2	25
3	2	1	2	64
4	2	2	1	12

Le modèle est : $Y \sim = 26,5 + [-11,5 \quad 11,5]R + [8 \quad -8]S + [-18 \quad 18]T$

Ce plan permet d'identifier les deux conditions extrêmes.

	R	S	T
Bruit Maxi	2	1	2
Bruit Mini	1	2	1

Le plan produit est alors réduit à un seul facteur à deux niveaux.

N°	Facteurs principaux			Facteurs bruits	
	A	B	C	R2/S1/T2	R1/S2/T1
1	1	1	1	Y ₁₁	Y ₁₂
2	1	2	2	Y ₂₁	Y ₂₂
3	2	1	2	Y ₃₁	Y ₃₂
4	2	2	1	Y ₄₁	Y ₄₂

Cette stratégie est très vivement recommandée.

4.2.2. N'étudier que le facteur le plus important

Dans cette stratégie, on réalise également un plan d'expériences préalable pour identifier s'il n'existe pas un facteur bruit beaucoup plus important que les autres. Si nous reprenons l'exemple précédent, nous avons :

$$Y \sim = 26,5 + [-11,5 \quad 11,5]R + [8 \quad -8]S + [-18 \quad 18]T$$

Le facteur T est beaucoup plus influent que les facteurs R et S , on ne retiendrait alors que le facteur T . Ce qui donnerait :

N°	Facteurs principaux			Facteur bruit T	
	A	B	C	1	2
1	1	1	1	Y ₁₁	Y ₁₂
2	1	2	2	Y ₂₁	Y ₂₂
3	2	1	2	Y ₃₁	Y ₃₂
4	2	2	1	Y ₄₁	Y ₄₂

4.2.3. Répétitions

Dans certains cas, les facteurs bruits sont difficilement maîtrisables, et il est impossible de conduire une expérimentation avec les facteurs bruits. Dans ce cas, la stratégie consiste à répéter le plan d'expériences dans différentes conditions pour identifier la variabilité due aux facteurs bruits.

Bien que les configurations des facteurs bruits ne soient pas orthogonales, la variabilité observée dans les n répétitions est bien due à une composition des facteurs bruits. Il est donc possible d'appliquer le ratio Signal/Bruit pour ce type de plan.

N°	A	B	C	Répétitions				
				1	2	i	n-1	n
1	1	1	1	Y	Y	Y	Y	Y
2	1	2	2	Y	Y	Y	Y	Y
3	2	1	2	Y	Y	Y	Y	Y
4	2	2	1	Y	Y	Y	Y	Y

Bien sûr cette stratégie est plus risquée que les deux précédentes. Elle ne devra être appliquée qu'en dernier recours lorsque les deux premières stratégies ne peuvent être appliquées.

5. Plans produits - cas d'un extremum

L'interprétation d'un plan produit sera différente selon la stratégie retenue. Nous avons vu au chapitre 3 qu'il y avait trois stratégies de base :

- minimisation ;
- maximisation ;
- recherche de nominale.

5.1. Minimisation et maximisation

Ces cas de figure sont les plus simples. Par exemple, pour une minimisation, il faut rechercher la configuration des facteurs qui donne les réponses les plus faibles possible. Cette optimisation doit se faire sur la nominale **ET** sur la dispersion. En effet, comme l'illustre la figure 5.14, la courbe n°2 est optimale bien que sa moyenne soit légèrement supérieure à la moyenne de la courbe n°1. Une interprétation du plan fondée sur les seules moyennes des réponses donnerait l'optimum en 1.

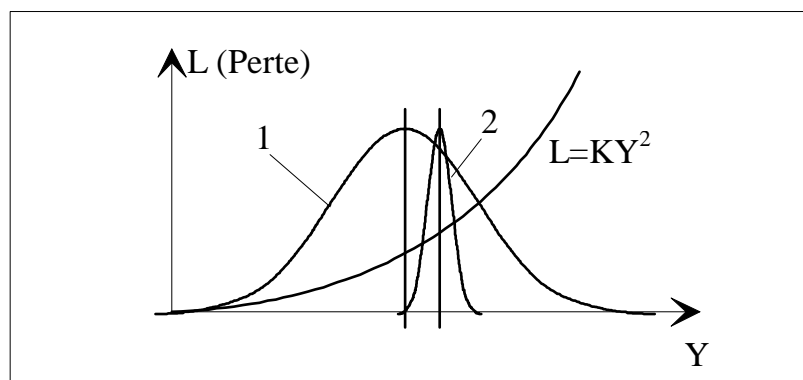


Figure 5.14 - Optimisation dans le cas d'une recherche de minimum

Le rapport Signal/Bruit dans le cas d'une minimisation cherche à minimiser la moyenne des écarts au carré (appelée MSD *Mean Square Deviation*) par rapport à zéro. L'optimisation se fait donc à la fois sur la moyenne et sur la dispersion.

L'interprétation d'un plan produit se fera dans ce cas suivant la démarche suivante :

Calcul pour chaque ligne du rapport Signal/Bruit

En utilisant la formule adaptée à la situation, on calcule le rapport S/N pour chaque ligne du plan.

Etablissement du modèle en réponse Signal/Bruit

On utilise comme réponse du plan, le rapport S/N de chaque ligne (v_j) et, on calcule les coefficients des facteurs principaux du modèle S/N .

Configuration des facteurs

Quelle que soit la stratégie (minimisation ou maximisation) la configuration optimale est la configuration qui *maximise* le rapport S/N .

Remarque

Si l'analyse en rapport S/N est suffisante pour l'optimisation du procédé, une analyse en moyenne et en variance permettra de calculer les effets des facteurs (principaux et bruits) sur le système, et ainsi de mieux comprendre son fonctionnement.

5.2. Exemple 1 - Cas d'une recherche de minimum

5.2.1. Le problème

Afin d'illustrer l'utilisation des plans produits de Taguchi dans le cas d'une recherche de minimum, nous allons étudier l'exemple d'une amélioration de capabilité d'un tour multibroche.

Les facteurs principaux sont :

- A - la vitesse (2 niveaux $V1$ et $V2$) ;
- B - le type d'outil (2 niveaux $T1$ et $T2$) ;
- C - la machine (test sur 2 machines $X1$ et $X2$ différentes - 2 niveaux).

Le modèle recherché est le suivant : $Y \sim M + A + B + C + AB + AC + BC$.

Dans ce cas de figure, les essais sont réalisés à partir de pièces de la production, le coût des essais est réduit. On réalisera le plan complet.

Les facteurs bruits sont :

- R - la température du lubrifiant (2 niveaux : froid et chaud) ;
- S - l'usure de l'outil (2 niveaux : neuf et usé) ;
- T - le type de matière (2 niveaux : faible et haute dureté).

Remarque : R et S sont des bruits internes, alors que T est un bruit entre produits.

Le plan produit réalisé est le même que celui que nous avons défini en 2.2. Les essais ont donné comme résultats :

N°	A	B	C	R				Moyennes	Variance	S/N
				S	T	1	2			
1	1	1	1	32	28	23	37	30,00	26,50	-29,67
2	1	1	2	40	32	29	30	32,75	18,69	-30,38
3	1	2	1	13	14	08	17	13,00	10,50	-22,54
4	1	2	2	19	20	15	15	17,25	05,19	-24,81
5	2	1	1	24	24	19	27	23,50	08,25	-27,49
6	2	1	2	30	24	24	32	27,50	12,75	-28,86
7	2	2	1	11	06	06	11	08,50	06,25	-19,95
8	2	2	2	10	13	08	13	11,00	04,50	-21,99
Moyennes				22,4	20,1	16,5	22,8	20,44	11,58	-25,46

Les résultats Y_{ij} correspondent à la dispersion (6 fois l'écart-type) en microns, mesurée sur 30 pièces consécutives produites par le tour.

5.2.2. Calcul du rapport Signal/Bruit

Ici, le problème est un problème d'optimisation de capabilité, on recherche donc la configuration qui donnera la dispersion *minimum*. Nous utiliserons le rapport S/N de type S.

Le calcul pour la première ligne est le suivant :

$$v_i = -10 \log[\bar{Y}^2 + \sigma^2] = -10 \log[30^2 + 26,50] = -29,67$$

Dans le cas d'une recherche de minimum, l'analyse en S/N suffit pour optimiser la configuration.

5.2.3. Calcul et optimisation en S/N

On utilise comme réponse pour ce calcul la colonne du rapport Signal/Bruit

Tableau des moyennes des facteurs

Moy 25,46	A	B	C
Niveau 1	-26,85	-29,09	-24,66
Niveau 2	-24,07	-21,82	-26,26

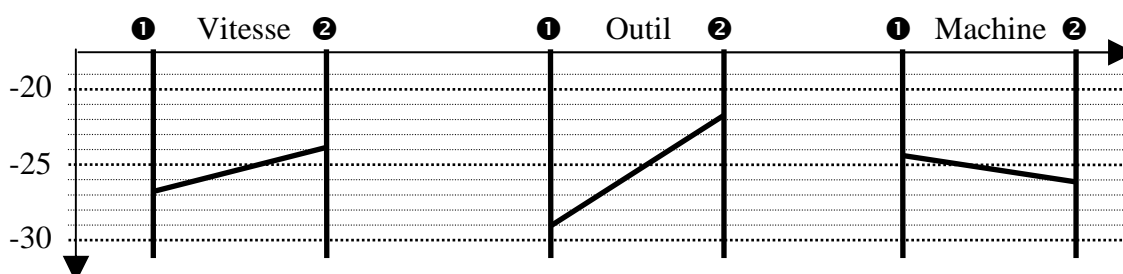
Tableau des moyennes des interactions

	B1	B2
A1	-30,0	-23,7
A2	-28,2	-20,0

	C1	C2
A1	-26,2	-27,6
A2	-23,2	-24,9

	C1	C2
B1	-28,6	-29,6
B2	-20,7	-22,9

Graphes des effets significatifs (les interactions ne sont pas significatives)



L'analyse de la variance que nous verrons au chapitre suivant nous permettra de ne retenir que les actions dont l'effet est significatif. On trouverait comme modèle significatif :

$$Y_{2\sim} = -25,51 + [-1,39 \quad +1,39]A + [-3,64 \quad +3,64]B + [0,80 \quad -0,80]C$$

les effets non significatifs ne sont pas retenus dans le modèle.

L'optimisation du modèle consiste à maximiser le rapport Signal/Bruit $Y_{2\sim}$, on prendrait donc :

- le facteur *A* au niveau 2 (Vitesse *V2*) ;
- le facteur *B* au niveau 2 (Outil *T2*) ;
- le facteur *C* au niveau 1 (Machine *X1*).

La meilleure capabilité sera obtenue avec la vitesse de coupe *V2*, l'outil de type *T2* et la machine *X1*. De plus, cette configuration sera la plus robuste par rapport aux perturbations telles que :

- les variations de température du lubrifiant ;
- les variations dues à l'usure de l'outil ;
- les variations entre les lots de matière.

Cette configuration 2 2 1 est l'expérience n° 7 du plan principal. On constate effectivement que cette configuration donne le meilleur compromis entre une réponse faible, et une faible sensibilité aux bruits (écart-type faible). Cette configuration donne un rapport Signal/Bruit optimal, la perte sera donc minimum. Dans ce cas, une vérification du modèle en dehors des nœuds du maillage n'est pas nécessaire, en effet, nous avons réalisé le plan complet, et donc toutes les configurations possibles.

5.2.4. Calcul et optimisation en moyenne et variance

L'optimisation a été réalisée par l'utilisation du ratio *S/N*. Cependant, il est utile pour mieux comprendre les effets des facteurs de calculer le modèle des réponses en moyenne.

Calcul des effets des facteurs principaux en moyenne

Pour calculer les coefficients du modèle, on utilise comme réponse du plan principal les moyennes des lignes.

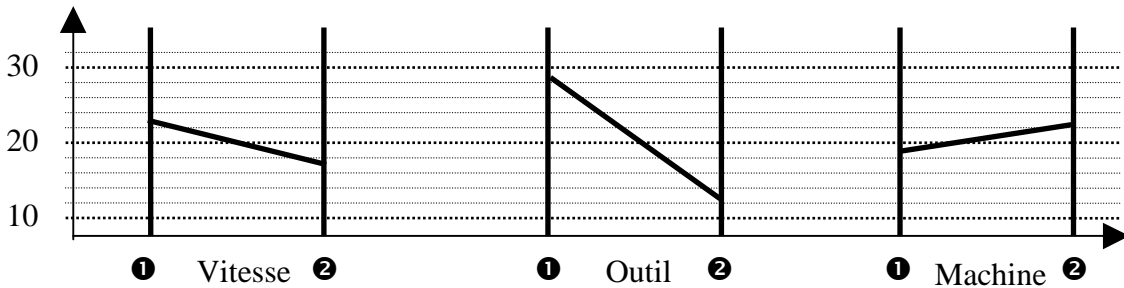
Tableau des moyennes des facteurs

Moy 20,44	A	B	C
Niveau 1	23,25	28,44	18,75
Niveau 2	17,63	12,44	22,13

Tableau des moyennes des interactions

	B1	B2		C1	C2		C1	C2
A1	31,38	15,13	A1	21,50	25	B1	26,75	30,13
A2	25,50	9,75	A2	16	19,25	B2	10,75	14,13

Graphes des effets significatifs (les interactions ne sont pas significatives)



On trouverait comme modèle significatif :

$$Y_{I\sim} = 20,44 + [2,81 \quad -2,81]A + [8 \quad -8]B + [-1,69 \quad 1,69]C$$

On remarque que dans ce cas, l'optimisation en moyenne donnerait le même résultat que l'optimisation en S/N.

Calcul des effets des facteurs principaux en variance

Pour calculer les coefficients du modèle, on utilise comme réponse du plan principal les variances des lignes.

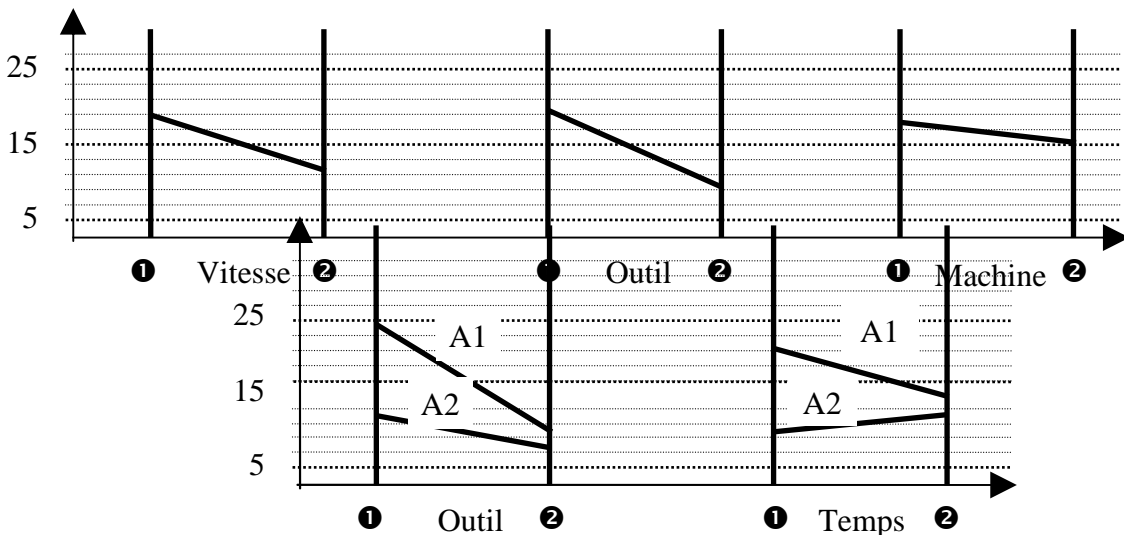
Tableau des moyennes des facteurs

Moy 15,44	A	B	C
Niveau 1	15,22	16,55	12,88
Niveau 2	7,94	6,61	10,28

Tableau des moyennes des interactions

	B1	B2		C1	C2		C1	C2
A1	22,59	7,84	A1	18,50	11,94	B1	17,38	15,72
A2	10,50	5,38	A2	7,25	8,63	B2	8,38	4,84

Graphes des effets significatifs



On trouverait comme modèle en ne retenant que les facteurs significatifs :

$$YI \sim 11,58 + [3,64 \quad -3,64]A + [4,97 \quad -4,97]B + [1,3 \quad -1,3]C \\ + A \begin{bmatrix} 2,4 & -2,4 \\ -2,4 & 2,4 \end{bmatrix} B + A \begin{bmatrix} 1,98 & -1,98 \\ -1,98 & 1,98 \end{bmatrix} C$$

Pour minimiser la variance, il faut donc placer *A* au niveau 2 et *B* au niveau 2, *C* au niveau 1. Dans ce cas de figure toutes les optimisations vont dans le même sens, l'optimisation est immédiate.

Calcul des effets des facteurs bruits

Moy 20,44	R	S	T
Niveau 1	21,2	19,4	22,6
Niveau 2	19,6	21,4	18,3

En utilisant les moyennes des colonnes comme réponse au plan "bruit" à 4 essais, nous pouvons calculer les effets des facteurs bruits. Nous trouvons :

$$Y \sim 20,44 + [+0,8 \quad -0,8]R + [-1 \quad +1]S + [2,1 \quad -2,1]T$$

L'effet du facteur *T* par exemple est calculé en appliquant la formule générale de calcul des effets moyens soit :

$$E_{T1} = (\text{Moyenne des réponses lorsque } T=1) - (\text{Moyenne générale}) \\ (22,4 + 22,8)/2 - 20,44 = 2,1$$

Le résultat de ce calcul ne sert que pour information. En effet, par définition, nous "supportons" les effets des facteurs bruits sans pouvoir agir dessus. Cependant l'optimisation du rapport *S/N* permet de jouer sur les interactions entre les facteurs bruits et les facteurs principaux (si elles existent) afin de réduire l'influence des facteurs bruits.

5.3. Exemple 2 - Cas d'une recherche de maximum

Pour illustrer un exemple de plan produit en recherche de maxima, nous nous appuyerons sur un plan d'expériences destiné à optimiser le thermo-scellage pour un emballage par chauffage et pression.

L'objectif est de maximiser la résistance à l'ouverture de l'emballage. Le déballage d'idées a permis de retenir les facteurs suivants :

Facteurs principaux		
Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
Pression de serrage	4 bars	6 bars
Température	110 °C	124 °C
Temps	7 secondes	12 secondes
Opérateur	Professionnel	Novice

Les niveaux sont choisis pour encadrer les valeurs retenues actuellement dans la gamme. Un essai de confirmation aux valeurs standard a été lancé en même temps que le plan d'expériences pour vérifier la linéarité.

Facteurs bruits		
Facteurs	Niveau 1	Niveau 2
Poste	Poste 1	Poste 2
Lot de papier	Lot 1	Lot 2
Taille de l'emballage	Petit	Grand

Le plan retenu pour le plan principal et la table L_8 en utilisant les colonnes 1, 2, 4, 8 (Plan de résolution IV). Pour le plan bruit on choisit de faire un plan fractionnaire L_4 .

Le facteur le plus difficile à faire varier est le facteur température, on le place en colonne 1. On suppose des interactions entre les facteurs température, pression, temps. On a donc placé ces facteurs respectivement dans les colonnes :

Température	Pression	Temps	Opérateur
1	2	4	7

Le résultat des essais a donné :

N°	Temp	Press	Temps	Opér	Poste				Moye	Var	S/N	
					1	1	2	2				
					Lot	1	2	1	2			
					Taille	Petit	Gra	Gra	Petit			
1	110	4	7	Pro	30,1	19,9	19,5	32,9	25,60	35,81	27,51	
2	110	4	12	Nov	37,8	23,1	24,0	35,2	30,02	42,87	28,97	
3	110	6	7	Nov	33,5	22,7	18,9	34,5	27,4	45,49	28,03	
4	110	6	12	Pro	40,1	23,8	24,6	39,6	32,02	61,34	29,39	
5	124	4	7	Nov	37,0	26,3	24,7	38,7	31,67	38,81	29,54	
6	124	4	12	Pro	41,3	35,4	33,8	40,6	37,77	10,46	31,45	
7	124	6	7	Pro	40,2	28,9	29,7	38,3	34,27	25,28	30,43	
8	124	6	12	Nov	42,0	31,8	30,7	40,4	36,22	25,22	30,94	
Moyennes					38,1	26,5	25,7	37,5	31,88	35,66	29,53	

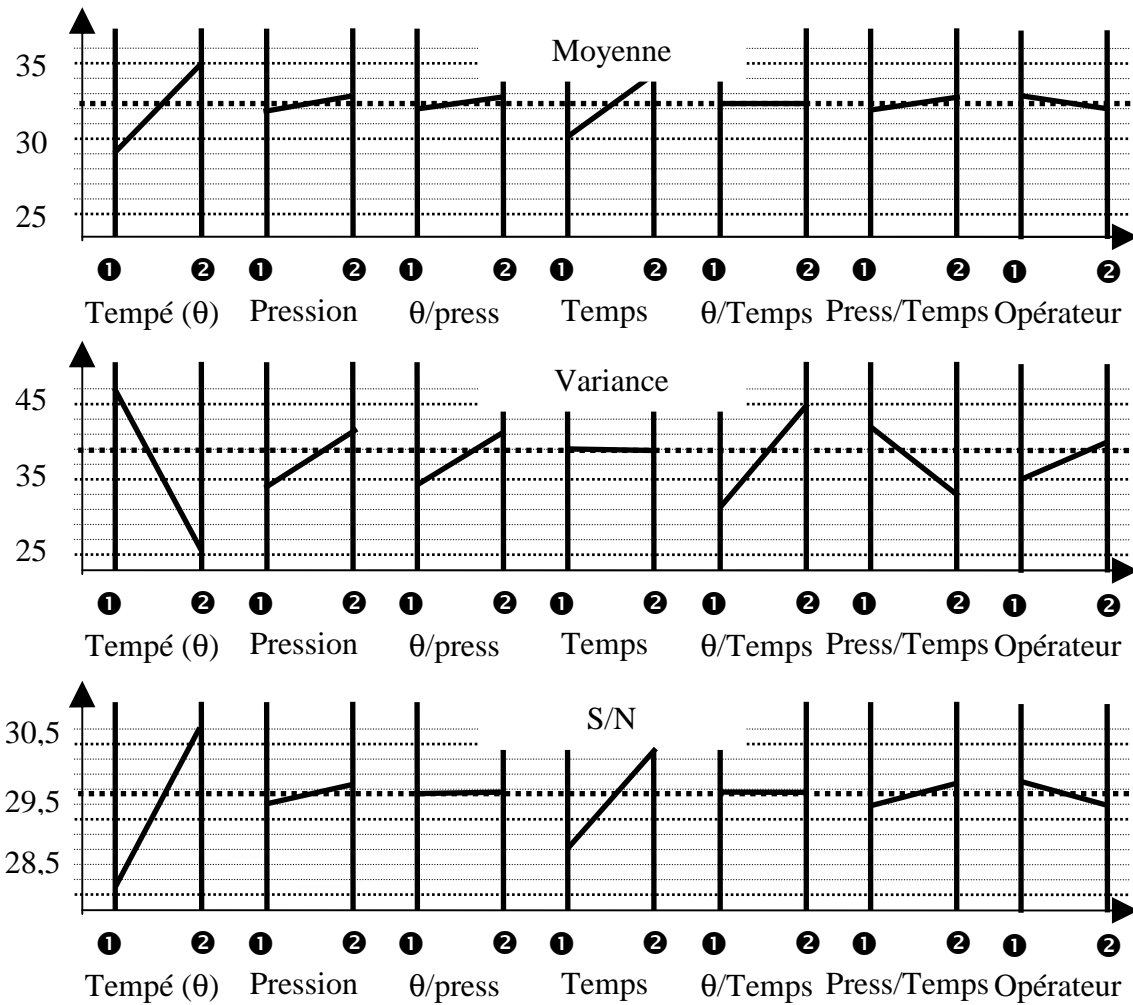
Le signal bruit est calculé par la formule adaptée au cas d'une recherche de maximum soit :

$$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{Y_{ij}^2} \right) \right] = -10 \log \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left(1 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$$

Calcul des effets

		Tempé	Press	Tempé/ press	Temps	Tempé/ Temps	Press/ Temps	Opérat
Moyenne	N1	28,8	31,3	31,5	29,7	31,8	31,4	32,4
	N2	35,0	32,5	32,2	34,0	32,0	32,4	31,4
	E _{facteur1}	-3,11	-0,61	-0,34	-2,14	-0,13	-0,49	0,54
Variance	N1	46,4	32,0	32,3	36,3	29,3	40,3	33,2
	N2	24,9	39,3	39,0	35,0	42,1	31,0	38,1
	E _{facteur1}	10,7	-3,7	-3,4	0,7	-6,4	4,6	-2,4
S/N	N1	28,5	29,4	29,5	28,9	29,5	29,3	29,7
	N2	30,6	29,7	29,6	30,2	29,6	29,7	29,4
	E _{facteur1}	-1,06	-0,17	-0,07	-0,66	-0,05	-0,19	0,16

Ce qui donne comme graphique :



L'optimisation consiste à placer les facteurs de telle sorte qu'ils :

- minimisent la variance ;
- maximisent la réponse.

Le meilleur compromis entre les deux est donné par le ratio S/N.

On trouve en tenant compte des interactions :

Niveaux optimums	Température	Pression	Temps	Opérateur
Moyenne	2	1 ou 2	2	1
Variance	2	1	2	1
S/N	2	1 ou 2	2	1

Compte tenu des interactions, la pression a peu d'effet lorsque l'on place le temps à 2 et la température à 2. L'opérateur doit être placé sur le niveau 1 montrant ainsi l'intérêt de la formation sur le poste de travail.

La configuration optimum ayant été testée dans le plan d'expériences et donnant satisfaction, on a vérifié la linéarité sur le point central correspondant au standard actuel.

La confirmation a donné :

Vérification	Prévu par le modèle	Mesuré
Moyenne	31,9	31,7
Variance	35,7	35,8
S/N	29,5	29,6

Ce qui confirme que les niveaux avaient été placés dans le domaine de linéarité des facteurs.

Ce plan d'expériences a permis de trouver un point de fonctionnement robuste par rapport aux facteurs bruits, et, de hiérarchiser l'influence des différents facteurs sur la qualité du scellage.

6. Plans produits - Recherche de nominale

6.1. Recherche de nominale ou de cible

Le cas des recherches de nominale est le cas le plus complexe. L'étude expérimentale doit permettre d'identifier deux types de facteurs.

1. Les facteurs qui jouent sur la dispersion des résultats.
2. Les facteurs qui jouent sur la moyenne des résultats (appelés facteurs d'ajustement).

De plus, on a vu qu'il fallait dissocier les cas où la variance est proportionnelle à la grandeur mesurée des cas où les effets en variances et en moyenne sont décorrélés.

Cas le plus général où la variance est proportionnelle à la grandeur mesurée

L'optimisation robuste consiste dissocier les facteurs qui agissent principalement sur la moyenne, de ceux qui agissent principalement sur le bruit. Pour optimiser le système, on doit minimiser la variance proportionnellement à la grandeur mesurée en minimisant le ratio signal sur bruit de type nominale II.

$$v_i = 10 \log \left(\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2} \right)$$

On utilisera les facteurs qui agissent principalement sur la moyenne pour ajuster le système sur la valeur souhaitée.

Pour chaque ligne du plan d'expériences, nous calculons :

- la moyenne de la ligne ;
- la variance de la ligne ;
- le ratio Signal/Bruit de type II.

Pour chacune des trois réponses, on établit un graphe d'effet, et un modèle. L'optimisation d'un plan produit de ce type se fait en trois étapes :

1. dissocier les facteurs qui agissent principalement sur la moyenne (facteur d'ajustement) ou principalement sur le ratio Signal/Bruit ;
2. placer les facteurs qui agissent principalement sur le ratio Signal/Bruit au niveau qui maximise le ratio (minimiser la perte) ;
3. utiliser les facteurs d'ajustement pour placer la moyenne sur la cible.

Le modèle en variance permet de mieux comprendre le comportement global du système. Cependant, il est préférable de faire l'optimisation robuste à partir du ratio S/N plutôt qu'à partir de la variance. En effet, le ratio S/N optimise la variance proportionnellement à la valeur mesurée, alors qu'une optimisation en variance donnerait trop de poids aux grandes valeurs par rapport aux petites valeurs.

Cas où la variance est indépendante de la grandeur mesurée

Ce cas est également le cas où la cible recherchée est égale à zéro avec des valeurs qui peuvent être négatives.

Dans ce cas, pour minimiser la perte, il faut étudier séparément les effets sur la variance et sur la moyenne. L'optimisation en S/N de type I donne le meilleur compromis par rapport à la cible.

$$v_i = -10 \log \left[(\bar{Y} - \text{cible})^2 + \sigma^2 \right]$$

Pour cela, pour chaque ligne du plan d'expériences, nous calculons :

- la moyenne de la ligne ;
- la variance de la ligne ;
- le ratio Signal/Bruit de type I.

Pour chacune des trois réponses, on établit un graphe d'effet, et un modèle.

L'optimisation consiste alors à :

1. dissocier les facteurs qui agissent principalement sur la **moyenne** (facteur d'ajustement) ou principalement sur la **variance** ;
2. placer les facteurs qui agissent principalement sur la **variance** au niveau qui la minimise ;
3. utiliser les facteurs d'ajustement pour placer la moyenne sur la cible ;
4. contrôler la double optimisation en maximisant la réponse en S/N.

Il est souvent plus facile de faire l'optimisation à l'aide du ratio S/N qu'à partir de la double optimisation moyenne variance. En effet, il n'est pas toujours possible de bien dissocier les facteurs qui agissent sur la moyenne de ceux qui agissent sur la variance. Cependant, il est très utile de calculer quand même le modèle en moyenne et en variance pour mieux comprendre le comportement du système étudié.

6.2. Exemple de recherche de nominale

Pour étudier le cas d'une recherche de nominale, nous prendrons comme exemple le décapuchonnage d'un stylo en plastique. Le problème consiste à améliorer, par un choix judicieux des paramètres, la dispersion sur la force nécessaire au décapuchonnage. Avant la réalisation de ce plan d'expériences, certains stylos avaient tendance à se décapuchonner tout seuls, alors que d'autres demandaient un effort trop important.

Une étude a montré que l'effort idéal se situait aux environs de 1400 grammes avec un minimum de 1000 grammes et un maximum de 1800 grammes. L'objectif de l'étude est donc de viser la nominale de 1400 grammes en limitant la dispersion autour de cette nominale.

Un brainstorming a permis de déterminer les facteurs principaux qui sont les suivants :

- *A* - Matière du capuchon (matières 1 et 2) ;
- *B* - Matière du stylo (matières 1 et 2) ;
- *C* - Emmanchement (faible et serré) ;
- *D* - Profondeur d'emmanchement (court et long).

ainsi que les facteurs bruits :

- *R* - nombre de décapuchonnages successifs (premier et dixième) ;
- *S* - vieillissement (premier jour et après vieillissement artificiel) ;
- *T* - température extérieure (0° C et 35° C).

Le modèle est alors :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + R + S + T$$

Un certain nombre de contraintes complémentaires viennent s'ajouter à notre problème concernant l'esthétique du stylo. Il est en effet souhaitable que le stylo et le capuchon soient réalisés dans la même matière. De plus, si possible, on retiendra la matière n° 2 qui possède des caractéristiques de moulage bien supérieures à la matière 1.

6.3. Choix du ratio S/N

Dans ce problème, la cible est parfaitement identifiée et nous cherchons à minimiser la perte centrée sur la cible 1400 grammes en rentrant dans l'intervalle de tolérance 1000/1800.

Une étude sur la relation entre la grandeur mesurée et la variance a montré leur relative indépendance. On s'oriente donc vers l'utilisation du ratio S/N de type I qui permettra directement de trouver la configuration qui minimisera la perte. L'utilisation de la sensibilité et du ratio S/N de type II aurait également permis l'optimisation mais en laissant à l'expérimentateur le soin de faire la double optimisation en position et en dispersion. Nous choisirons ici l'optimisation par le ratio de type 1 afin de montrer l'intérêt de l'optimisation globale.

6.4. Création du plan d'expériences

Il est très facile de créer le plan produit correspondant à ce problème. Le plan principal sera tiré de la table L_8 en utilisant les colonnes 1, 2, 4, 7 (plan de résolution IV). Le plan bruit sera tiré de la table L_4 . Le plan produit sera donc le suivant :

N°	A	B	C	D					Moyennes	Variances	S/N
					R	S	T				
					1	1	2	2			
					1	2	1	2			
					1	2	2	1			
1	1	1	1	1	1070	565	474	564	668,25	55166,19	-57,71
2	1	1	2	2	1968	1600	1638	1582	1697	24889,00	-50,53
3	1	2	1	2	1382	916	554	680	883	99885,00	-55,65
4	1	2	2	1	1422	1046	847	805	1030	59508,50	-52,93
5	2	1	1	2	1279	904	779	819	945,25	39167,19	-53,91
6	2	1	2	1	1412	1034	1095	963	1126	29447,50	-50,19
7	2	2	1	1	509	320	228	255	328	12038,50	-60,65
8	2	2	2	2	1680	1313	1244	1215	1363	34763,50	-45,58
Moyennes					1352	965	843	859	1005,06	44358,17	-53,39

Le ratio Signal/Bruit (S/N) est calculé en utilisant la formule du rapport S/N dans le cas d'un problème de recherche de cible = 1400.

La première ligne se calcule par la formule :

$$v_1 = -10 \log((\bar{Y} - cible)^2 + \sigma^2) = -10 \log((668,25 - 1400)^2 + 55166,19) = -57,71$$

6.5. Analyse des résultats

L'analyse d'un plan produit dans le cas d'une recherche de nominale est plus complexe que le cas des recherches d'extremum car il faut optimiser en même temps la moyenne et la dispersion.

À partir des résultats précédents, on calcule trois modèles :

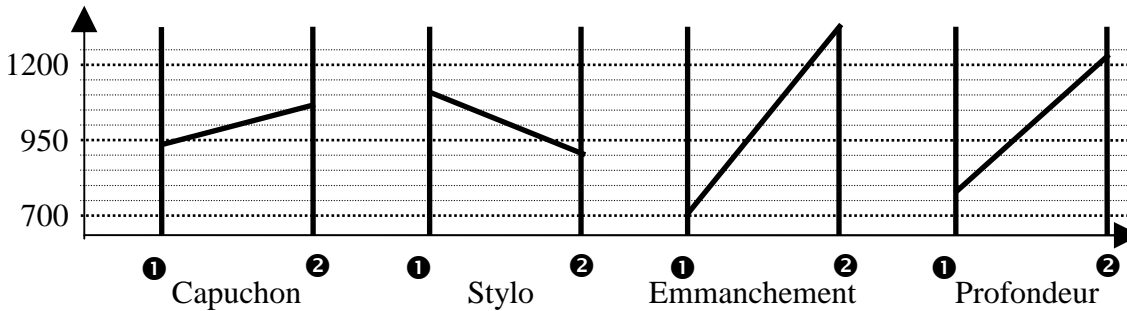
- le modèle de réponse des moyennes ;
- le modèle de réponse des variances ;
- le modèle de réponse en S/N .

Modèle en moyenne

Tableau des moyennes des facteurs

Moy 1005	A	B	C	D
Niveau 1	1070	1109	706	788
Niveau 2	941	901	1304	1222

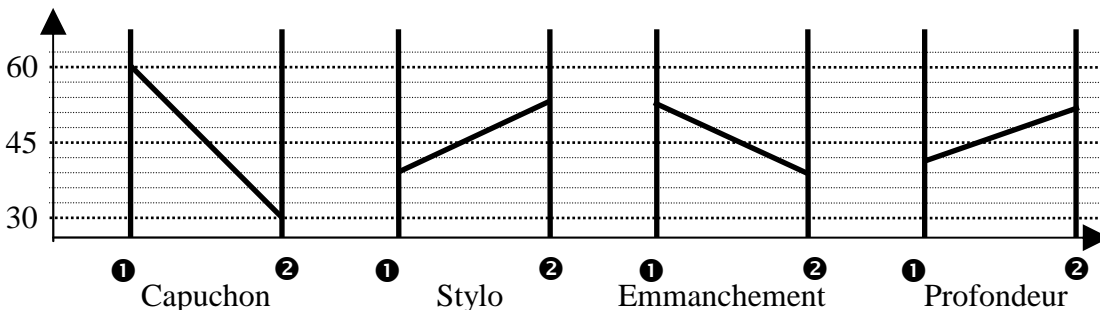
Graphes des effets significatifs (les interactions ne sont pas significatives)



Modèle en Variances

Tableau des moyennes (les valeurs sont en milliers)

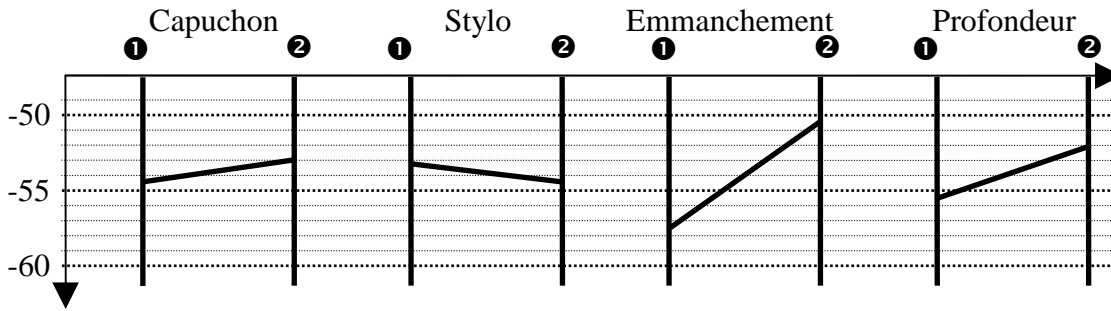
Moy 59,14	A	B	C	D
Niveau 1	59,8	37,2	51,6	39,1
Niveau 2	28,9	51,5	37,2	49,7



Seul le facteur A est significatif sur la variance, nous devons le fixer au niveau 2.

Modèle en Signal/Bruit

Moy -53,78	A	B	C	D
Niveau 1	-54,21	-53,09	-56,98	-55,37
Niveau 2	-52,58	-53,70	-49,81	-51,42



Seuls les facteurs C et D sont très significatifs

Optimisation de la configuration des facteurs

L'optimisation consiste à :

- placer les facteurs qui agissent sur la dispersion au niveau donnant une dispersion minimale ;
- utiliser les facteurs d'ajustement pour placer la moyenne sur la cible.

Pour faire cette double optimisation, nous allons résumer dans un tableau les influences des facteurs sur chacun des modèles.

	A	B	C	D
Moyenne	Faible	Moyen	Très fort	Fort
Variance	Fort	Moyen	Faible	Faible
S/N	Faible	Faible	Très fort	Moyen

- Le facteur le plus facile à positionner est le facteur C (emmanchement) qui à une influence très forte sur la moyenne et sur le ratio S/N. D'après le graphe des effets du ratio S/N, il faut placer ce facteur C au niveau 2 la moyenne des résultats est de 1304 (cela minimise l'écart entre la cible 1400 et la moyenne obtenue). Ce facteur a peu d'influence sur la dispersion.
- Le facteur A (matière du capuchon) peut être facilement positionnée au niveau 2 pour minimiser la variance des résultats.
- Le facteur B (matière du stylo) sera également choisi au niveau 2 (même matière que le stylo) pour des problèmes d'esthétique. Ce choix est validé par la faible influence sur le ratio S/N.
- Le facteur D qui a une faible influence sur la variance et une forte influence sur la moyenne sera utilisé pour régler la valeur sur les 1400 g désirés. Dans un premier temps, on fixe D au niveau 2 pour maximiser le ratio S/N.

6.6. Essai de confirmation

La configuration retenue est donc la suivante :

	A	B	C	D
Niveau	2	2	2	2

Le modèle matriciel en moyenne donne les résultats suivants :

$$Y_{\sim} = 1005 + [64,5 \ -64,5]A + [104 \ -104]B + [-299 \ 299]C + [-217 \ 217]D$$

La force atteinte sera donc de $1005 - 64,5 - 104 + 299 + 217 = 1352$.

Afin de confirmer les résultats du plan, il faut bien sûr faire un essai de confirmation pour la configuration retenue. Dans notre cas, la configuration a déjà été testée dans le plan d'expériences. On ne peut donc pas valider le modèle à partir d'un des essais du plan. Cependant, cette solution donnant satisfaction, c'est celle qui sera retenue pour la conception des produits.

Il reste un petit ajustement à réaliser pour atteindre la moyenne de 1400 grammes, on utilisera pour cela le facteur D (profondeur d'emmanchement) en réalisant un essai de confirmation avec les facteurs A, B, C à 2 et avec une profondeur d'emmanchement supérieure à la profondeur que nous avons retenue pour le niveau 2 du plan d'expériences.

7. Utilisation des plans produits dans le cas du facteur "temps"

7.1. Le temps comme un facteur bruit

Parmi les essais souvent réalisés, figurent les tests de fiabilité. Dans ce type de test, le facteur « temps » intervient sous différentes formes, le temps avant dégradation, le nombre de cycles...

Pour étudier ce facteur particulier, Taguchi considère le facteur temps comme un facteur bruit. En effet, son action modifie les caractéristiques du produit souvent de façon irréversible. Il est donc indispensable d'intégrer le temps afin de concevoir des produits robustes face à l'action du temps.

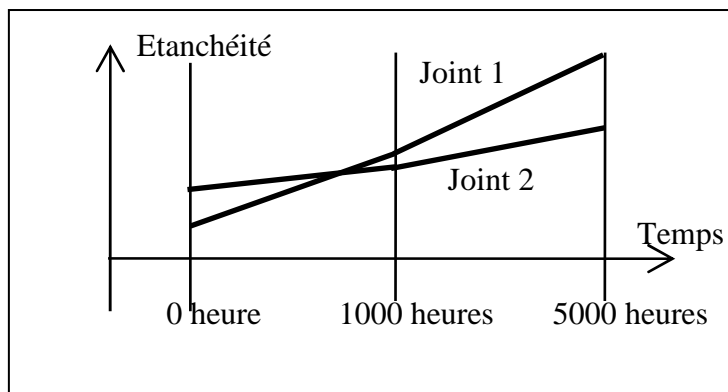


Figure 5.15 - Interaction temps/joint

La figure 5.15 montre que le choix du joint 1 qui donne une meilleure étanchéité lorsque le produit est neuf, n'est pas satisfaisant. En effet, cette caractéristique se dégrade vite dans le temps. Par contre, le joint 2 offre une meilleure robustesse du produit. C'est celui que devrait choisir le technicien.

Contrairement à ce qui se pratique souvent, les tests de fiabilité doivent être réalisés dès les premières phases d'une étude. La robustesse face au temps doit être recherchée conjointement à la

robustesse face aux facteurs bruits. En effet, dans le cas de la figure 5.15, le choix d'un type de joint va entraîner des usinages particuliers, des graisses adaptées, et il sera difficile de remettre en question ces choix à la fin de l'étude.

7.2. Séparer S/N et S/T

Taguchi propose de considérer le facteur temps comme un facteur bruit. Dans le cas où on combine les facteurs bruits dans un plan produit, il faut alors rajouter aux facteurs bruits classiques le facteur temps.

Au contraire, Sylvain Rochon dans un travail remarquable propose de séparer les facteurs bruits des facteurs temps. On étudiera donc deux ratios, le ratio S/N (Signal/Bruit) et le ratio S/T (Signal/Temps)¹.

En effet, la robustesse face aux bruits est parfois contradictoire avec la robustesse face au temps. En considérant le temps comme un facteur bruit, on trouve un optimal global qui dépend du poids relatif qui a été donné au temps et aux bruits.

Si dans le plan d'expériences, on a choisi des niveaux très éloignés pour les facteurs bruits classiques, et des niveaux relativement proches pour le facteur temps, le signal bruit global calculé sera nécessairement plus sensible au facteur qui est à la source de la dispersion. Dans ce cas, en optimisant le ratio S/N global, on optimisera le système face aux facteurs bruits, parfois au détriment du facteur temps.

7.3. Exemple d'application

Supposons que nous étudions le système suivant :

Facteurs principaux : 3 facteurs *A*, *B*, *C* ;
 Facteur bruit : 1 facteur *R* ;
 Facteur temps : 1 facteur *T*.

Tous les facteurs sont placés à deux niveaux. On suppose qu'il n'y a pas d'interaction entre les facteurs. Le plan produit s'écrit facilement.

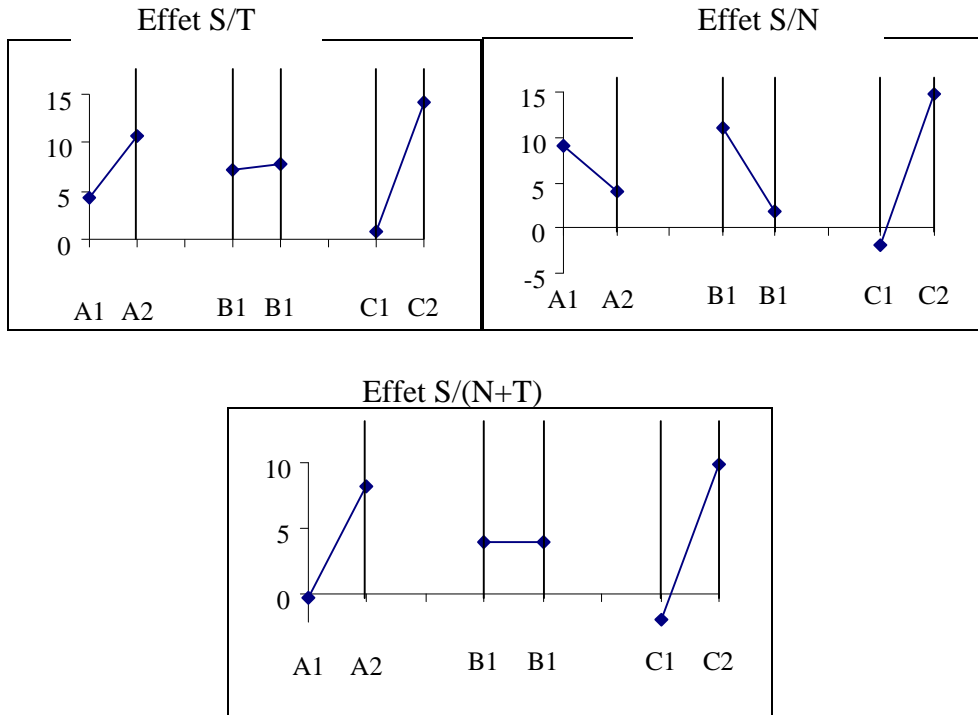
N°	A	B	C	T1		T2		S/N _{Bruit}	S/T _{Temps}	S/N _{Global}
				R1	R2	R1	R2			
1	1	1	1	4	5	0,5	1	5,11	-2,62	-6,17
2	1	2	2	8	12	2	6	12,81	11,40	5,54
3	2	1	2	11	10	10	9	16,96	16,96	14,17
4	2	2	1	3	3	-2	-2	-9,03	4,42	2,34
Moyennes										

¹ Sylvain Rochon - *Méthodologie de conception fiable des produits industriels associant l'approche expérimentale et l'expertise* - Thèse de doctorat - Université de Savoie - Juillet 1996.

On calcule le ratio S/T en faisant les moyennes des colonnes où T est à 1 et à 2, on trouve :

	T1	T2	S/T
1	4,5	0,75	-2,62
2	10	4	11,40
3	10,5	9,5	16,96
4	3	-2	4,42

$$-10 \log\left(\frac{1}{4,5^2} + \frac{1}{0,75^2}\right)$$



On note dans le cas de figure présenté que l'optimisation globale ne rend pas compte de la différence de comportement des facteurs par rapport à la robustesse aux bruits et par rapport à la fiabilité, c'est-à-dire leur robustesse au temps.

Chapitre 6

Les caractéristiques dynamiques

1. Caractéristiques statiques et dynamiques

1.1. Les limites de l'optimisation statique

Dans le chapitre 5, nous avons largement développé la méthode proposée par Taguchi pour optimiser un produit ou un processus. L'originalité et l'efficacité des plans produits, de la fonction perte et du ratio Signal sur Bruit ne sont plus à démontrer. Cependant, toutes les optimisations ont été réalisées pour un seul point de fonctionnement. Or, il est bien rare qu'un produit ne doit fonctionner qu'en un seul point, il fonctionne en général sur une plage donnée.

Pour illustrer notre propos, nous allons nous appuyer sur un exemple particulièrement simple : un petit vérin (figure 6.1).

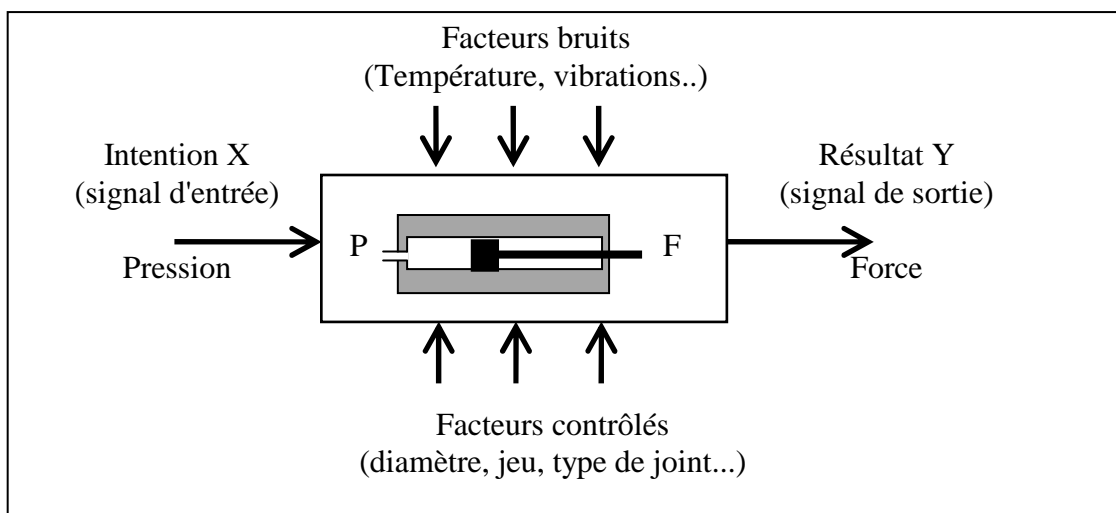


Figure 6.1 - Principe du vérin

L'objectif de ce vérin est de transformer une pression en effort mécanique. On peut donc définir la fonction idéale par une droite passant par zéro telle que le montre la figure 6.2.

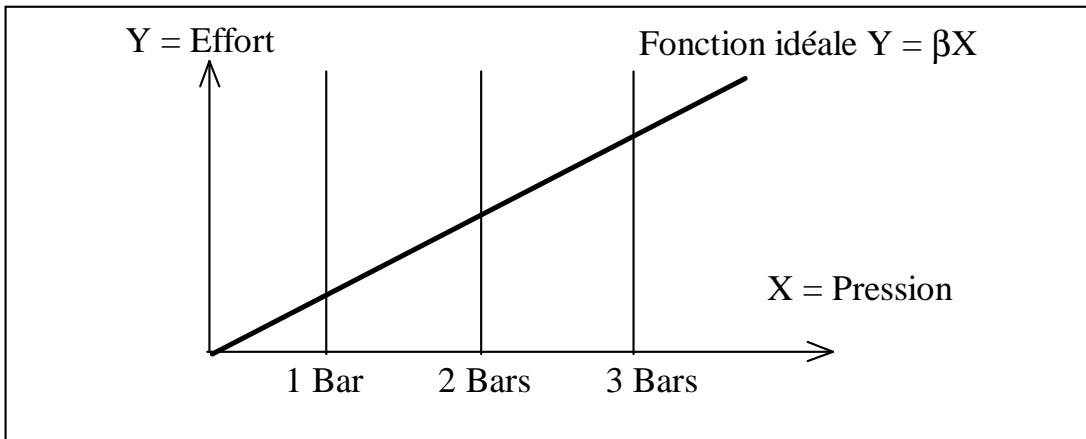


Figure 6.2 - Fonction idéale pour le vérin

Pour optimiser la conception du vérin, on veut étudier le comportement de l'effort en sortie de vérin en fonction des paramètres de conception. Pour cela, on réalise un plan produit à partir des facteurs principaux et des facteurs bruits.

Facteurs principaux		Facteur Bruit	
A	Jeu entre l'axe et l'alésage	R	Température extérieure
B	Type de graisse choisie		

L'optimisation classique consiste à faire le plan pour une pression de fonctionnement figée. La pression est fixée à deux bars pour réaliser ce plan d'expériences. On dit que l'on fait une **optimisation statique en recherche de nominale**.

Le plan produit serait :

N°	Jeu	Graisse	Tempér 1	Tempér 2	Moy	Var	S/N
1	Mini	Graisse 1	250	220	235	225	-47,44
2	Mini	Graisse 2	350	235	292,5	3306	-49,49
3	Maxi	Graisse 1	320	300	310	100	-49,83
4	Maxi	Graisse 2	390	290	340	2500	-50,72

L'optimisation consiste à optimiser le ratio S/N dont le modèle est :

$$Y_{\sim} = 21,13 + [-2,1 \quad 2,1]A + [5,7 \quad -5,7]B + A \begin{bmatrix} 0,8 & -0,8 \\ -0,8 & 0,8 \end{bmatrix} B$$

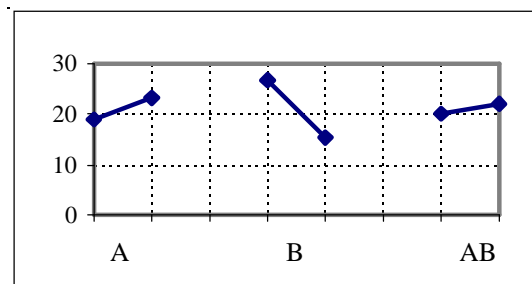


Figure 6.3 - Graphe des effets

L'optimum se trouve pour $A = 2$ et $B = 1$.

Dans cette optimisation statique, nous n'avons pas recherché la fonction idéale du produit. Nous avons simplement recherché le point de fonctionnement qui optimise la valeur de l'effort de sortie en fonction de la dispersion relative pour une pression de 2 bars.

1.2. L'optimisation dynamique

1.2.1. Principe

L'optimisation dynamique de ce système consisterait à faire l'optimisation sur toute la plage de fonctionnement par rapport à la fonction idéale (voir figure 6.4). Pour de nombreux produits, la fonction idéale est tout simplement $Y = \beta X$, soit une droite passant par l'origine et de coefficient directeur β , correspondant à une réponse proportionnelle au signal.

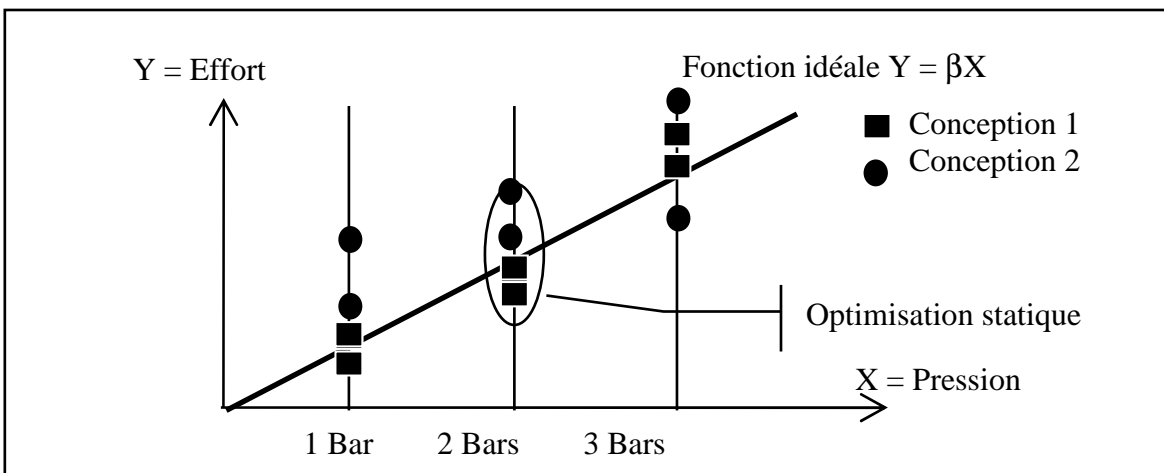


Figure 6.4 - Optimisation dynamique d'un système

Remarque : même si la fonction idéale ne passe pas par l'origine, il est toujours possible de se ramener à ce cas de figure par un changement d'origine.

Pour optimiser un système en dynamique, il faut faire varier le facteur de signal (ici la pression) sur au moins trois niveaux. On optimise ainsi les paramètres de conception (ici le jeu et la graisse) afin de minimiser les écarts dus aux bruits (la température) par rapport à la fonction idéale (droite $Y = \beta X$).

Dans la figure 6.4, il est clair que la conception 1 donne un résultat plus robuste par rapport à la fonction idéale que la conception 2. Les écarts entre les points et la fonction idéale sont plus faibles.

1.2.2. Notion de fonction perte dans le cas dynamique

Dans le cas dynamique, la perte moyenne se détermine non plus par rapport à la cible comme dans le cas d'une recherche de nominale, mais par rapport à la fonction idéale.

On calcule aisément la perte pour une mesure : $L = k (Y_i - \beta X)^2$.

et la perte moyenne $L = \frac{k}{n} \sum (Y_i - \beta X_i)^2$

Pour faire l'optimisation, on introduit une dimension orthogonale supplémentaire qui est donnée par le signal. Le plan d'expériences qu'il faut réaliser est donc le suivant :

N°	Facteurs contrôlés		Facteur signal		Facteur bruit			
	Jeu	Graisse	Pression = 1		Pression = 2		Pression = 3	
			Temp 1	Temp 2	Temp 1	Temp 2	Temp 1	Temp 2
1	Mini	Graisse 1	75	50	250	220	290	250
2	Mini	Graisse 2	140	75	350	235	400	315
3	Maxi	Graisse 1	150	135	320	300	450	430
4	Maxi	Graisse 2	160	120	390	290	520	440

L'optimisation statique cherche à optimiser le système sur un point de fonctionnement. L'optimisation dynamique cherchera à l'optimiser sur toute sa plage de fonctionnement.

On peut donc considérer que l'optimisation dynamique est une généralisation de l'optimisation en recherche de nominale que nous avons développée au chapitre 5.

2. L'optimisation dynamique

2.1. Les différents types de facteurs

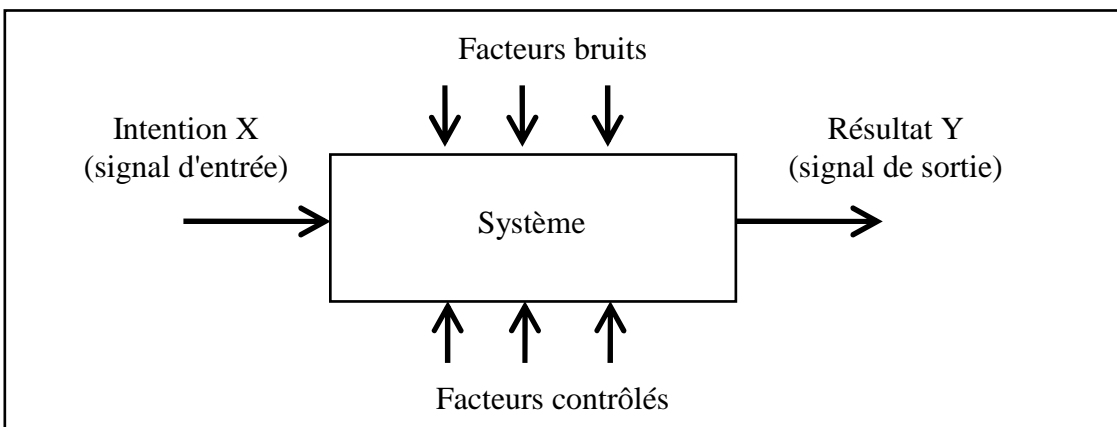


Figure 6.5 - Les différents types de facteurs

Dans l'optimisation dynamique, nous retrouverons bien sûr les différents types de facteurs que nous avons l'habitude de rencontrer et qui sont :

Les facteurs contrôlés à déterminer : ce sont ceux qui seront placés dans le plan principal. L'objectif de l'optimisation est de déterminer à quels niveaux il faut les placer pour minimiser l'influence des facteurs bruits tout en ayant la meilleure réponse possible.

Les facteurs contrôlés figés : ce sont des facteurs qui influent sur la réponse mais qui ne sont pas étudiés dans le plan d'expériences. On aura le souci de figer ces facteurs pendant la réalisation du plan.

Les facteurs bruits : ce sont les facteurs que l'on ne peut pas ou que l'on ne veut pas contrôler. On les utilisera dans le plan d'expériences afin de rendre la conception robuste vis-à-vis des facteurs bruits.

Outre ces trois types de facteurs, on aura également un nouveau type de facteurs, **les facteurs signaux d'entrée**.

Les facteurs signaux d'entrée : ce sont les variables que l'on va utiliser pour adapter la sortie du système sur la sortie désirée. Donnons quelques exemples simples :

- sur un four à micro-ondes, le facteur signal est le temps de chauffe ;
- sur une voiture, c'est l'accélérateur ;
- sur un fer à repasser, c'est la position du potentiomètre ;
- sur une souris d'ordinateur, c'est le déplacement ;
- sur une machine-outil c'est le déplacement de l'axe demandé par le programme ;
- sur un système de régulation de chauffage, c'est la température affichée ;
-

2.2. Robustesse dans le cas dynamique

La notion de robustesse dans le cas d'une caractéristique dynamique est légèrement différente que dans le cas d'une caractéristique statique.

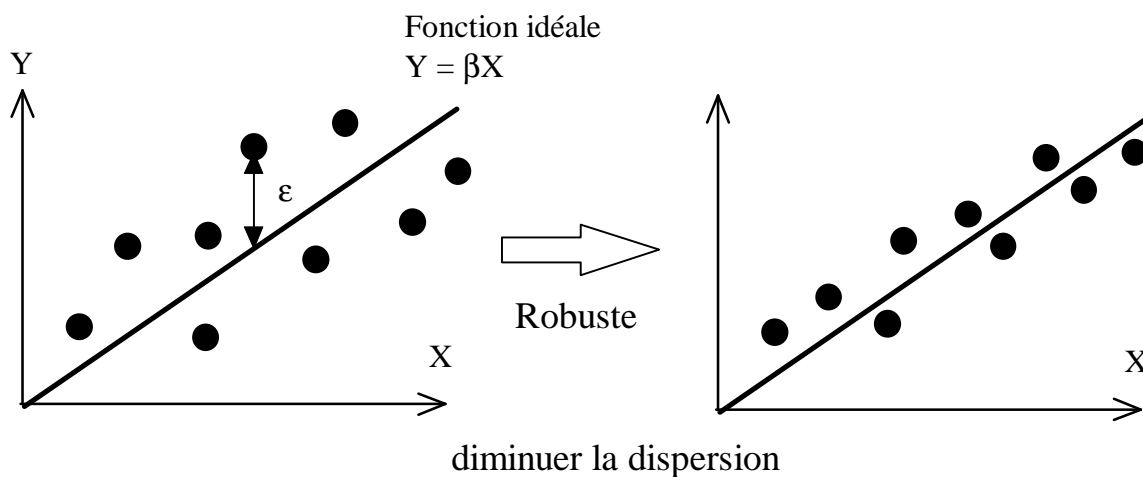
On cherche à obtenir une fonction idéale que l'on décrit par une droite d'équation : $Y = \beta X$.

Rendre robuste une conception dans ce cas, c'est agir selon 3 directions :

- diminuer la dispersion autour de la fonction idéale ;
- linéariser la réponse ;
- augmenter la sensibilité du système.

La figure 6.6 décrit ces trois axes de robustesse. Dans les deux premiers cas, il est évident que la figure la plus robuste est celle qui minimise la somme des écarts par rapport à la fonction idéale, il faut donc minimiser les ϵ .

On cherchera donc à diminuer la variance $V_e = \sigma_e^2$ autour de la droite $Y = \beta X$.



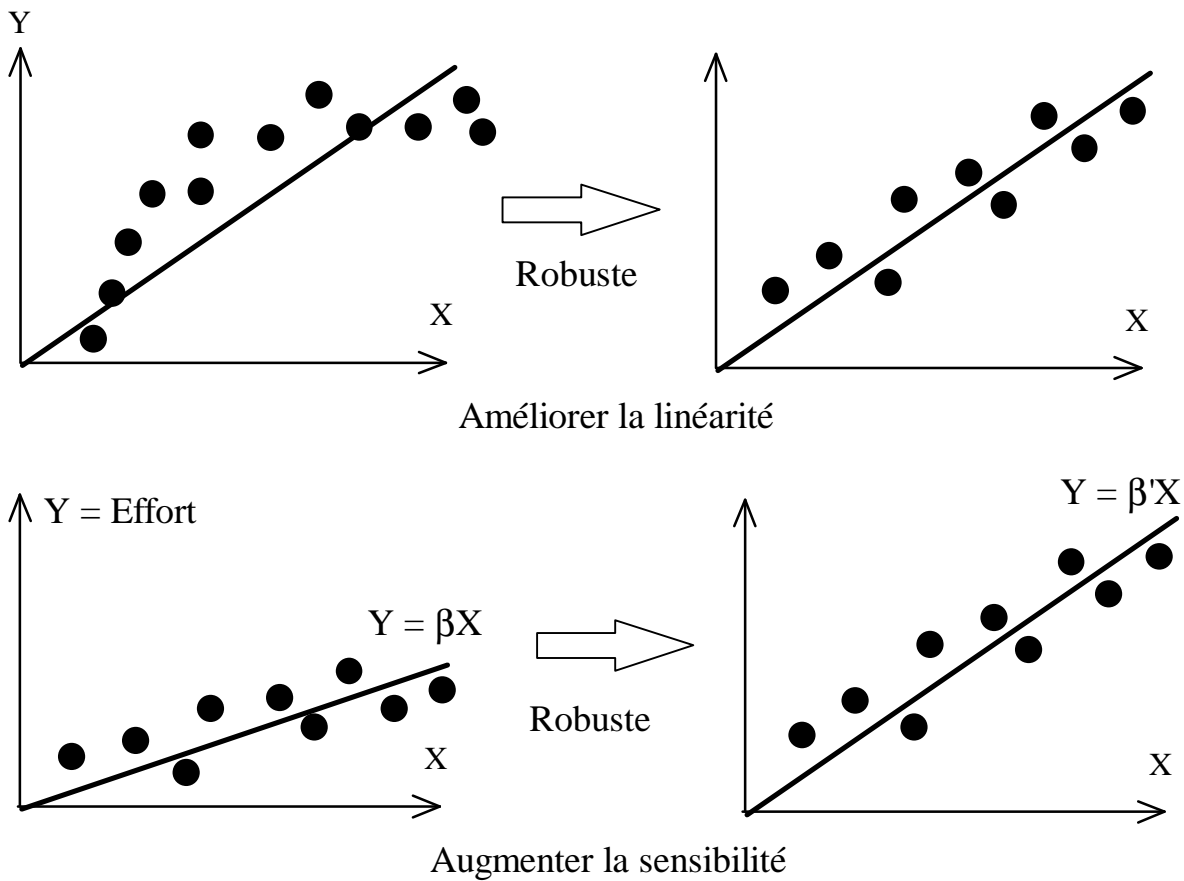


Figure 6.6 - Les trois axes de la robustesse

2.3. Le ratio S/N dans le cas dynamique

Dans le cas d'un critère dynamique, pour chaque configuration de facteurs contrôlés (chaque ligne du plan), on peut écrire :

$$Y = \beta X + \varepsilon$$

où β est le coefficient directeur de la droite et ε l'écart entre le point et la droite. Le coefficient β peut être déterminé par la minimisation de la moyenne des carrés des écarts par rapport à la fonction idéale.

Formons $Q = \frac{1}{n} \sum (Y_i - \beta X_i)^2$ qui est proportionnelle à la perte moyenne par mesure. Pour minimiser Q par rapport à β , il suffit d'annuler la dérivée, on trouve :

$$\frac{\partial Q}{\partial \beta} = \frac{-2}{n} \sum (Y_i - \beta X_i) X_i = 0$$

D'où	$\beta = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2}$
------	---

L'optimisation consiste à faire évoluer les réponses pour rendre la sensibilité telle que $\beta = \beta'$.

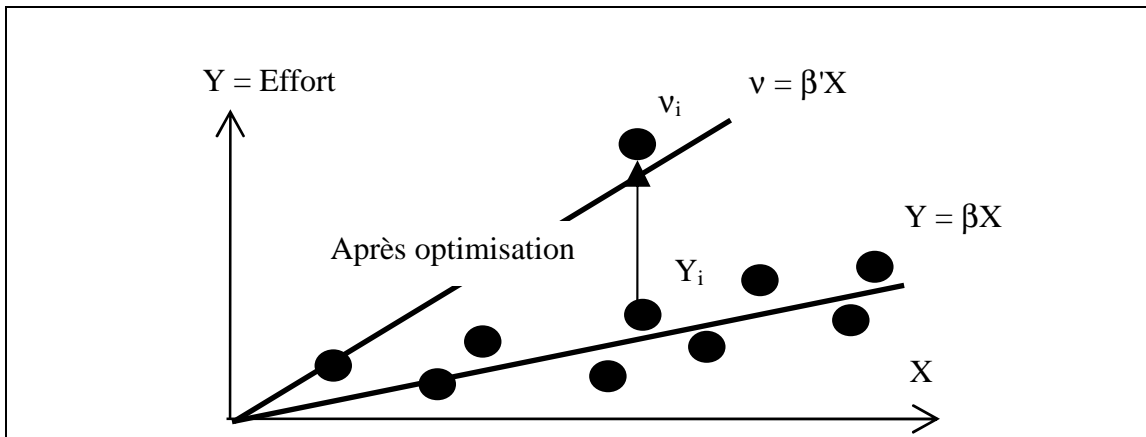


Figure 6.7 - Optimisation de la sensibilité

Dans ces conditions, chaque Y_i deviendra $v_i = \frac{\beta'}{\beta} Y_i$.

Pour minimiser la perte moyenne Q , il faut maximiser le ratio Signal/Bruit que nous définirons par :

$$\eta = 10 \cdot \log_{10} \frac{\beta^2}{\sigma^2}$$

Origine du ratio S/N

Après optimisation, on a $v_i = \frac{\beta'}{\beta} Y_i$. Dans ce cas la perte moyenne sera égale à

$$Q = \frac{k}{n} \sum (v_i - \beta' x_i)^2 = \frac{k}{n} \sum \left(\frac{\beta' Y_i}{\beta} - \beta' x_i \right)^2$$

$$Q = \frac{k}{n} \left(\frac{\beta'}{\beta} \right)^2 \sum (Y_i - \beta x_i)^2$$

Pour minimiser la perte moyenne, il faut donc minimiser le terme :

$$Q = \frac{\beta'^2 k}{\beta^2} \cdot \frac{\sum (Y_i - \beta x_i)^2}{n} = \frac{\beta'^2 k}{\beta^2} \cdot \sigma_e^2 \quad \text{soit} \quad Q = k \beta'^2 \frac{\sigma_e^2}{\beta^2}$$

Soit maximiser le ratio $\frac{\beta^2}{\sigma_e^2}$

2.4. Optimisation dynamique

Reprenons l'exemple du vérin. Dans ce cas de figure la fonction idéale est évidente, on cherche à avoir une droite d'équation $Y = \beta X$ avec β le plus grand possible. En effet, le but d'un vérin est d'obtenir un effort en sortie maxi, pour une pression minimale d'entrée. Il n'est pas toujours aussi évident de trouver la fonction idéale.

N°	Jeu	Graisse	Pression = 1		Pression = 2		Pression = 3		Moy	σ²	β	η
			B1	B2	B1	B2	B1	B2				
1	Mini	Graisse 1	75	50	250	220	290	250	189	1622	96	7,5
2	Mini	Graisse 2	140	75	350	235	400	315	252	3428	126	6,7
3	Maxi	Graisse 1	150	135	320	300	450	430	297	196	149	20,5
4	Maxi	Graisse 2	160	120	390	290	520	440	320	2099	161	10,9

Pour chaque ligne du plan on calcule le coefficient directeur de la droite β, pour la première ligne par exemple :

$$\beta = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} = \frac{1 \times 75 + 1 \times 50 + \dots + 3 \times 290 + 3 \times 250}{1^2 + 1^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2 + 3^2 + 3^2} = 95,89$$

Pour calculer la variance σ², pour chaque essai, on calcule la valeur théorique obtenue avec le coefficient β.

N°	β	Pression = 1	ε B1	ε B2	Pression = 2	ε B1	ε B2	Pression = 3	ε B1	ε B2
1	95,9	95,89	-20,9	-45,9	182,0	58,2	28,2	273,0	2,3	-27,7
2	126,1	126,1	13,9	-51,1	252,1	97,9	-17,1	378,2	21,8	-63,2
3	149,8	148,8	1,3	-13,8	297,5	22,5	2,5	446,3	3,8	-16,3
4	161,4	161,4	-1,4	-41,4	322,9	67,1	-32,9	484,3	35,7	-44,3

Pour la première ligne, première colonne on a une pression théorique

$$Pt = 95,9 \times 1 = 95,9 \quad \text{on en déduit} \quad \epsilon_{B1} = 75 - 95,9 = -20,9$$

La variance σ² est la variance du tableau des ε.

L'optimisation consiste à maximiser β et maximiser le ratio S/N. Le modèle donne :

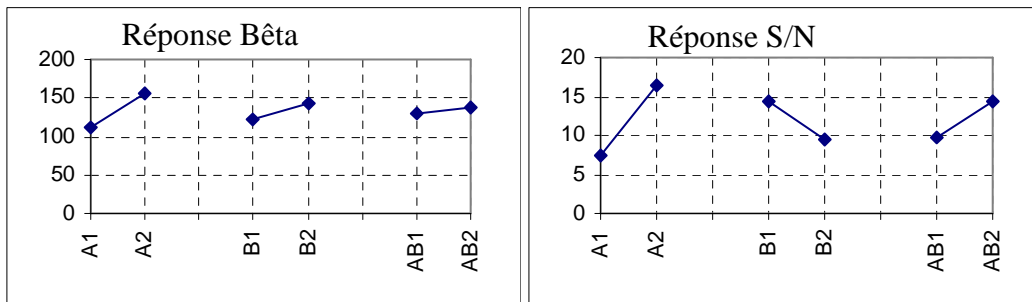


Figure 6.8 - Graphe des effets

Le modèle en β s'écrit

$$Y \sim 133 + [-22 \quad 22]A + [-10 \quad 10]B + \begin{bmatrix} -4,3 & 4,3 \\ 4,3 & -4,3 \end{bmatrix} C$$

Le modèle en S/N s'écrit

$$Y \sim 11,4 + [-4,5 \quad 4,5]A + [2,4 \quad -2,4]B + \begin{bmatrix} -2,3 & 2,3 \\ 2,3 & -2,3 \end{bmatrix} C$$

On note qu'il y a une contradiction entre l'optimisation en β et l'optimisation en S/N . Pour favoriser la précision du pilotage au détriment de l'énergie consommée, on retiendra l'optimum du ratio S/N pour la configuration suivante : $A = 2$ et $B = 1$

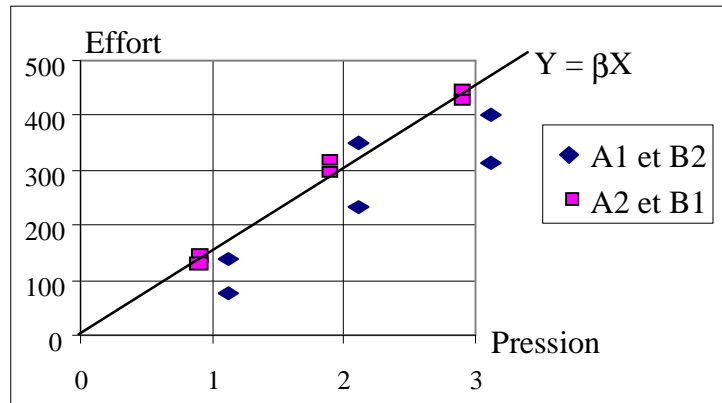


Figure 6.9 - Représentation graphique de l'optimisation

La figure 6.9 montre bien l'intérêt de l'optimisation. La configuration A2B1 (solution optimale) est plus près de la droite idéale que la configuration A1B2 (deuxième ligne du plan) qui donne le plus faible ratio S/N .

2.5. Les différents cas de figure

2.5.1. La droite passe par l'origine

C'est le cas le plus classique que nous venons de traiter, la fonction idéale est directement $Y = \beta x$.

2.5.2. L'origine de la droite est décalée par rapport à l'origine d'une valeur connue

Nous traiterons dans le paragraphe 3 un exemple de ce type. Dans l'exemple que nous traiterons, il s'agit de mesurer la température après chauffage pendant un certain temps. Dans ce cas, il est clair que l'origine de la droite est la température de départ. La fonction idéale se représente de la façon suivante :

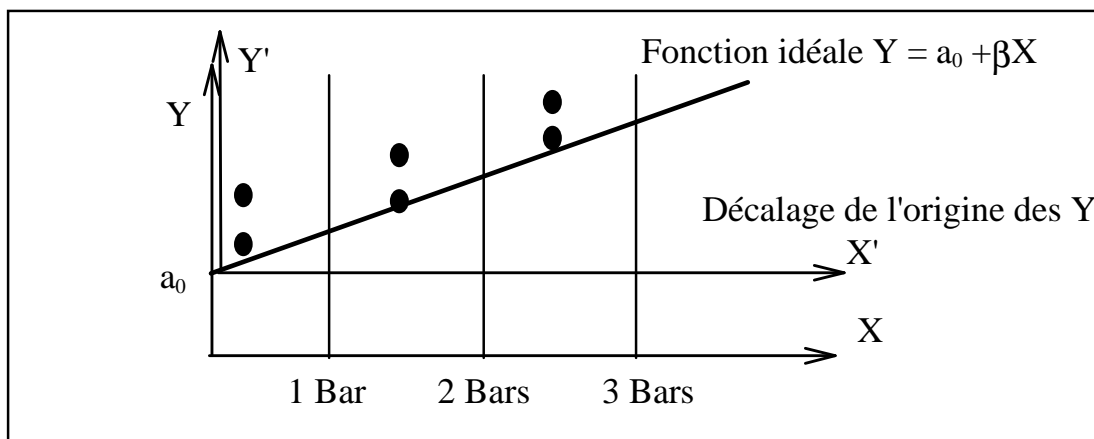


Figure 6.10 - Décalage en ordonnée d'une valeur connue

Dans ce cas, il suffit de décaler l'origine pour se ramener au cas classique.

On calcule pour chaque réponse $Y' = Y - a_0$

On traitera le plan avec la réponse Y' .

2.5.3. L'origine de la droite est décalée par rapport à l'origine d'une valeur inconnue

Dans ce cas, on place l'origine du repère sur le premier point testé du signal. Dans l'exemple de la figure 6.11, on considère que l'origine de l'abscisse est à un bar, l'origine de l'ordonnée est calculée comme étant la moyenne des résultats obtenue pour un signal de un bar.

On calcule :

La moyenne des réponses pour $X = 1$ ($\overline{Y_{X1}}$)

Pour chaque réponse :

$$Y' = Y - \overline{Y_{X1}}$$

$$X' = X - X_1$$

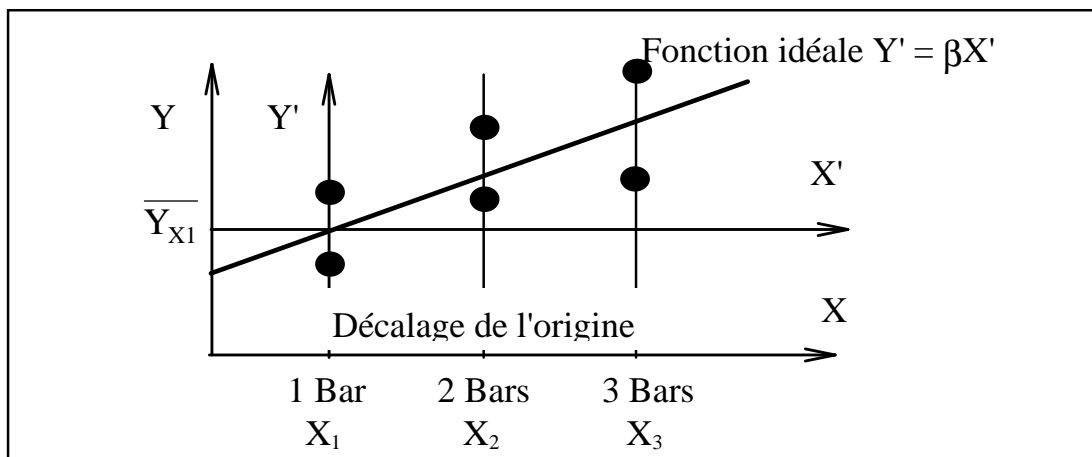


Figure 6.11 - Décalage en ordonnée d'une valeur inconnue

2.5.4. Cas général - La droite idéale est quelconque

Dans tous les cas précédents, la valeur du signal est connue, et on a vu qu'il était alors toujours possible de se ramener au cas d'une droite $Y = \beta X$.

Cependant, il arrive cependant que le signal n'est pas connu clairement. C'est le cas d'un bain dans lequel le signal serait commandé par une dose d'un produit dont la concentration est inconnue. On peut néanmoins réaliser une optimisation dynamique en faisant varier le nombre de doses.

Dans ce cas, pour se ramener au cas $Y = \beta X$, il est nécessaire de prendre comme origine, la moyenne des X et la moyenne de Y .

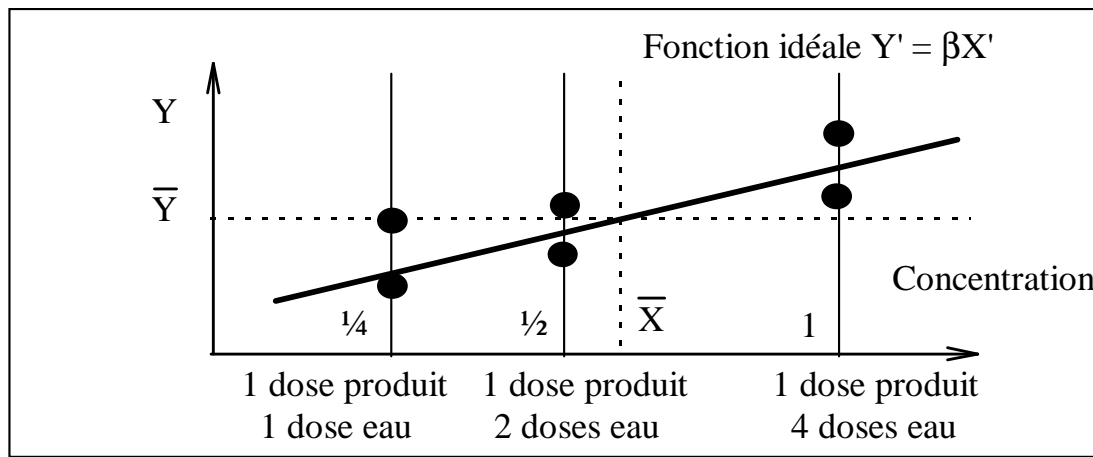


Figure 6.12 - Equation linéaire

Dans ce cas, avant de traiter le plan, on réalise les calculs suivants :

- Calcul de la moyenne des signaux $X (\bar{X})$
- Calcul de la moyenne des réponses $Y (\bar{Y})$
- Pour chaque X , on applique la transformation $X' = X - \bar{X}$
- Pour chaque Y , on applique la transformation $Y' = Y - \bar{Y}$
- On optimise le système à partir du signal X' et des réponses Y'

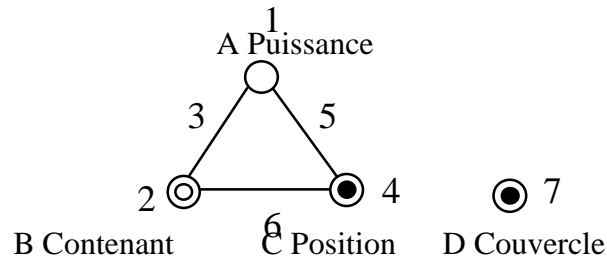
3. Application de l'optimisation dynamique

Pour illustrer cette méthode d'optimisation dynamique des systèmes, nous proposons de réaliser l'optimisation d'une cuisson par micro-ondes. Il sera aisé au lecteur de reproduire ce type d'essai.

Pour connaître la quantité d'énergie reçue par les aliments, nous avons chauffé un bol d'eau. Les facteurs étudiés sont les suivants :

Facteur signal				
	Facteurs	Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
X	Temps de chauffe	20 sec	30 sec	40 sec
Facteurs contrôlés				
	Facteurs	Niveau 1	Niveau 2	
A	Puissance	Maxi	Moyenne	
B	Type de contenant	Plastique	Verre	
C	Position dans le four	Centre	Bord	
D	Présence d'un couvercle	Oui	Non	
Facteurs Bruits				
R	Quantité de liquide	Moins	Plus	
	Propreté du four	Propre	Sale	

Le plan principal sera une table L_8 les interactions retenues étant AB, AC, BC , nous retiendrons le graphe 1 de la table L_8 .



La réponse mesurée est la **différence de température** obtenue par chauffage du bol. Nous n'avons pas retenu la température pour nous ramener au cas général $Y = \beta X$. En effet, si le temps de chauffe est nul, la différence de température sera nulle. Nous cherchons dans ce plan, la combinaison des facteurs qui nous donnera :

- une relation linéaire entre le temps de chauffe et la température ;
- une faible dispersion autour de cette relation linéaire ;
- un coefficient bêta le plus élevé possible.

Les facteurs bruits sont regroupés en un seul pour limiter le nombre d'essais.

Le plan d'expériences est donc le suivant :

N°	A	B	C	D	S1=20		S2=30		S3=40		M	β	Ve	S/N
					B1	B2	B1	B2	B1	B2				
1	1	1	1	1	31,0	13,5	44,5	23,2	57,0	28,7	33,0	1,09	156,9	-21,17
2	1	1	2	2	26,1	13,5	42,8	19,2	54,9	26,9	30,6	1,02	150,2	-21,58
3	1	2	1	2	27,1	17,5	42,6	23,1	53,4	34,7	33,1	1,10	82,3	-18,31
4	1	2	2	1	30,9	16,0	42,6	22,4	59,0	30,9	33,6	1,12	142,9	-20,58
5	2	1	1	2	25,9	11,1	33,4	15,6	38,2	19,9	24,0	0,78	92,4	-21,80
6	2	1	2	1	21,8	05,7	31,9	16,0	44,0	22,1	23,6	0,80	101,5	-22,02
7	2	2	1	1	20,0	11,4	31,0	20,5	43,4	31,0	26,2	0,89	36,7	-16,68
8	2	2	2	2	20,6	13,8	36,2	18,4	46,3	25,5	26,8	0,90	79,8	-19,97

$$\beta = \frac{\sum X_i Y_i}{\sum X_i^2} \quad \eta = 10 \cdot \log_{10} \frac{\beta^2}{\sigma^2}$$

Tableau des moyennes

Réponse		A(1)	B(2)	A/B(3)	C(4)	A/C(5)	B/C(6)	D(7)
Moyenne	1	32,56	27,79	29,14	29,07	29,11	29,36	29,10
	2	25,15	29,93	28,58	28,65	28,61	28,36	28,61
Bêta	1	1,08	0,92	0,98	0,97	0,97	0,97	0,97
	2	0,84	1,00	0,95	0,96	0,96	0,95	0,95
Variance	1	133,05	133,05	105,90	92,06	105,11	118,00	109,49
	2	77,61	77,61	104,75	118,59	105,54	92,66	101,16
S/N	1	-20,41	-21,64	-19,85	-19,49	-20,37	-20,88	-20,11
	2	-20,12	-18,69	-20,68	-21,04	-20,16	-19,65	-20,42

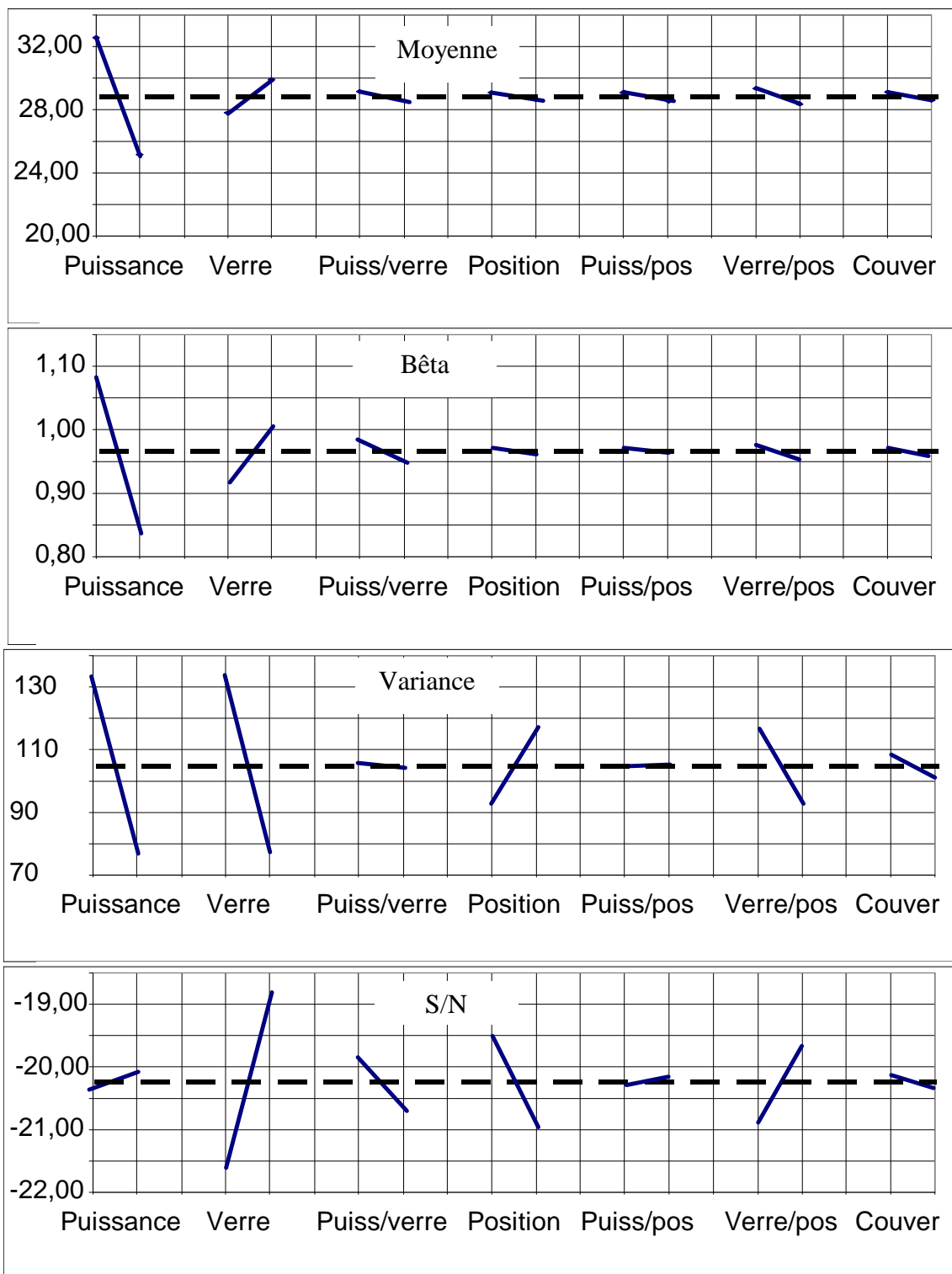


Figure 6.13 - Graphe des effets

L'optimisation consiste à maximiser bêta et S/N. Si on privilégie la précision, il vient immédiatement la configuration optimum :

Facteurs	A(1)	B(2)	A/B(3)	C(4)	A/C(5)	B/C(6)	D(7)
Optimum	2	2	1	1	2	2	1 ou 2
Valeur	Moyenne	Verre		Centre			
Effet S/N	+0,15	+1,38	+0,41	+0,77	ns	+0,62	ns
Effet Bêta	-0,12	+0,04	ns	ns	ns	ns	ns

Valeur théorique pour l'optimum

$$Y_{S/N\sim} = -20,26 + 0,15 + 1,38 + 0,41 + 0,77 + 0,62 = -16,93$$

$$Y_{\beta\sim} = 0,96 - 0,12 + 0,04 = 0,88$$

Une vérification a été réalisée sur un point non mesuré, on a trouvé :

N°	A	B	C	D	S1		S2		S3		M	β	Ve	S/N
					B1	B2	B1	B2	B1	B2				
1	2	2	1	2	19,2	12	30,1	21,5	44,2	28	25,8	0,87	40,7	-17,3

Ce test de confirmation montre bien la robustesse de la solution face aux facteurs bruits. On constate qu'en utilisant la puissance moyenne du micro-ondes, et en choisissant de façon opportune la position du bol, ainsi que le type de bol on diminue la sensibilité aux bruits, et on linéarise la réponse.

Le système étant plus linéaire, il est plus facilement pilotable. La figure 6.14 illustre la linéarisation qui a été effectuée.

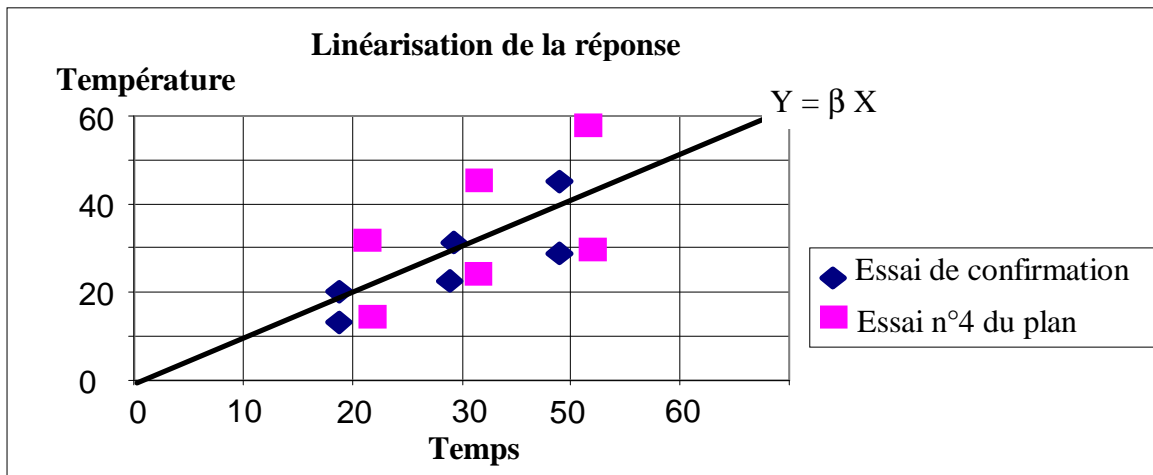


Figure 6.14 - Optimisation dynamique robuste

Chapitre 7

Analyse de la variance

1. L'analyse de la variance, pourquoi ?

Dans les chapitres précédents, nous avons réalisé des plans d'expériences à partir desquels nous avons calculé des effets de facteurs.

Réalisons un plan d'expériences, pour lequel les réponses ne dépendent pas des facteurs étudiés, mais suivent la répartition d'une loi de Gauss. Dans ce cas, le calcul des effets par la méthode traditionnelle donnerait malgré cela des effets non nuls. Il nous faut être capable de déterminer si ces effets sont significatifs (c'est-à-dire effectivement associés au facteur étudié), ou si ces effets ne sont que la manifestation de la variabilité du système due aux facteurs non contrôlés (non étudiés dans le plan).

Exemple

Modèle recherché : $Y \sim = M + A + B + C + AB$

Plan complet de 3 facteurs à 2 niveaux (8 expériences).

Plan d'expériences :

N°	A	B	C	Y	Y~	r
1	1	1	1	5,0	4,81	+0,19
2	1	1	2	4,7	4,89	-0,19
3	1	2	1	5,1	5,21	-0,11
4	1	2	2	5,4	5,29	+0,11
5	2	1	1	4,8	4,66	+0,14
6	2	1	2	4,6	4,74	-0,14
7	2	2	1	4,7	4,91	-0,21
8	2	2	2	5,2	4,98	+0,22

Les réponses Y ont été choisies de façon aléatoire parmi une population d'écart-type 0,2.

En appliquant les méthodes classiques de calcul des effets, on trouverait :

moyenne générale = 4,94

$$E_{A1} = +0,113 \quad \text{et} \quad E_{A2} = -0,113$$

$$E_{B1} = -0,163 \quad \text{et} \quad E_{B2} = +0,163$$

$$E_{C1} = -0,038 \quad \text{et} \quad E_{C2} = +0,038$$

$$I_{A1B1} = -0,038 \quad I_{A1B2} = +0,038 \quad I_{A2B1} = +0,038 \quad I_{A2B2} = -0,038$$

Mais, en fait, ces effets ne sont pas dus aux facteurs étudiés et nous devons être capables de détecter si ces effets ne sont que les manifestations de la variabilité du système.

L'analyse de la variance nous permettra de déterminer à partir de quel seuil, un effet peut être considéré comme significatif.

2. Cas où il n'y a qu'un seul facteur contrôlé

2.1. L'hypothèse nulle

Soit un système avec un seul facteur contrôlé (A) avec k niveaux. L'hypothèse H_0 , appelée hypothèse nulle, consiste à vérifier l'absence d'influence du facteur A . La figure 7.1 nous permet d'aborder la notion d'hypothèse nulle.

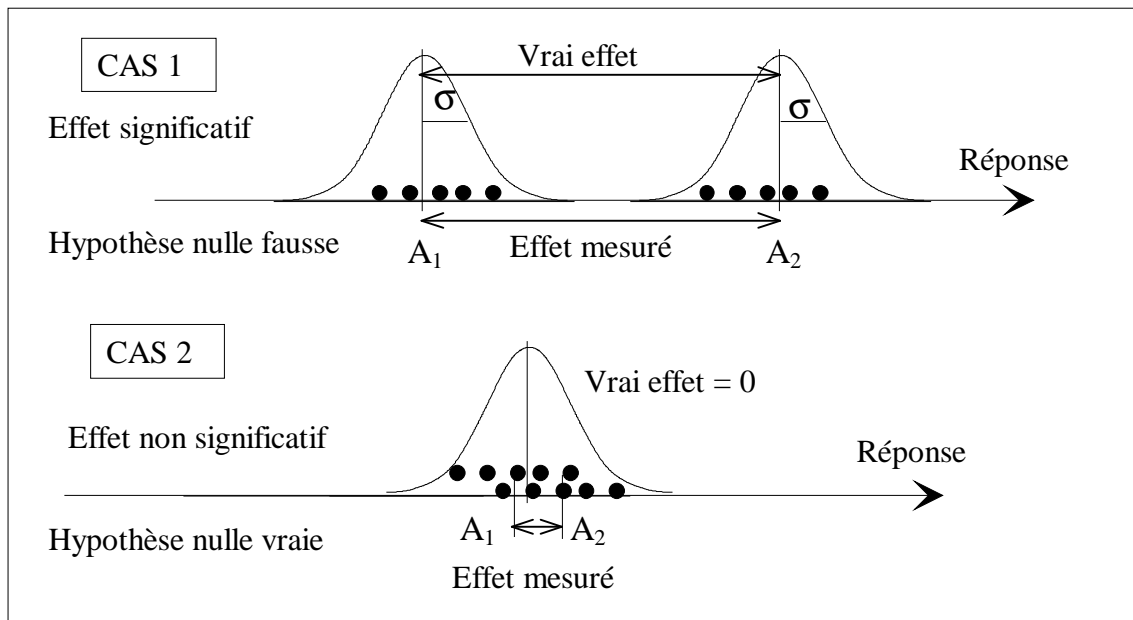


Figure 7.1 - Hypothèse nulle

Soit A un facteur à 2 niveaux 1 et 2. On réalise plusieurs expériences lorsque A est au niveau 1. Il est probable que toutes ces expériences ne donneront pas le même résultat. On observera une dispersion des résultats autour d'une moyenne. On réalise de même plusieurs expériences lorsque A est au niveau 2.

Notations :

- . A_1 : Moyenne des résultats lorsque $A = 1$
- . A_2 : Moyenne des résultats lorsque $A = 2$
- . σ : Ecart-type des écarts observés autour de la position moyenne.

Dans le cas n°1 de la figure 7.1, il est évident que l'effet du facteur A est significatif. L'écart observé lorsqu'on passe de $A=1$ à $A=2$ est significativement différent de la dispersion résiduelle. Dans le cas n°2, l'écart observé n'est pas le fait d'un effet du facteur A . Cet écart provient d'un simple écart dû à l'échantillonnage.

On peut schématiser le principe de l'analyse de la variance par la figure 7.2 dans le cas d'un facteur significatif.

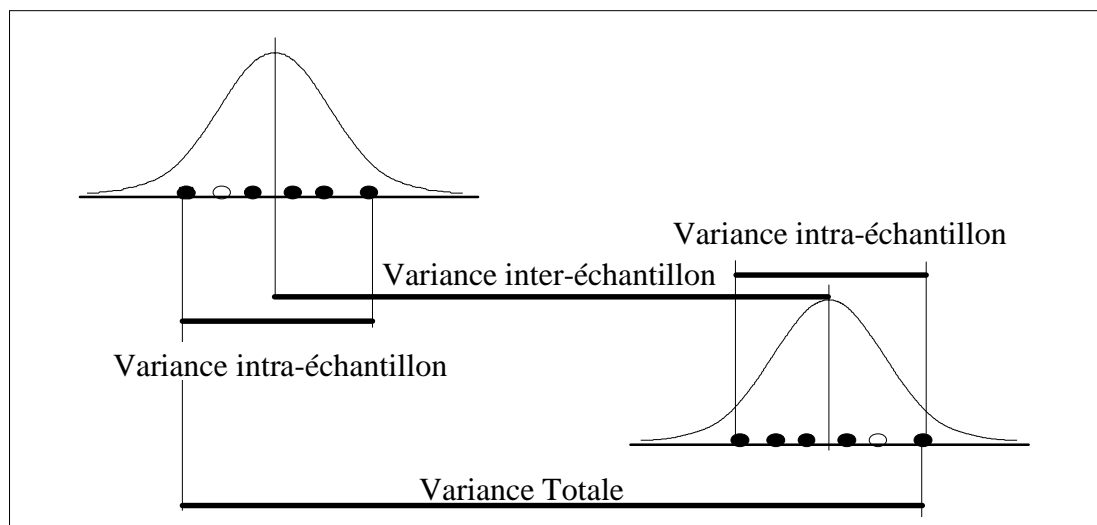


Figure 7.2 - Principe de l'analyse de la variance

La variance totale sur l'ensemble des essais se décompose en deux variances :

- la variance inter-échantillon (V_A) due à l'effet du facteur ;
 - la variance intra-échantillon (V_r) due à la dispersion sur la réponse.
- Si le facteur n'est pas significatif, la variance inter-échantillon sera égale à la variance inter-échantillon.
 - Si le facteur est significatif, la variance inter-échantillon sera proportionnellement supérieure à la variance intra-échantillon. Pour le tester, on établit le ratio : $F = V_A/V_r$.

L'hypothèse nulle consiste à supposer que l'effet de A est nul, le ratio F ne doit donc pas dépasser une certaine limite (F_{limite}).

On dira que A est significatif si F est supérieure à F_{limite} fixé par la table de Snedecor.

2.2. Cas d'1 facteur à k niveaux

Considérons maintenant l'expérience suivante, on réalise k échantillons (nombre de niveaux) de n observations. Cela revient à faire un plan d'expériences à un seul facteur.

Les résultats peuvent être regroupés dans le tableau suivant :

N°	Niveau de A	Réponse 1		Réponse j		Réponse n	Moyenne	Effet
1	A1							
i	Ai			Y_{ij}			\bar{Y}_i	E_{Ai}
k	Ak							
Moyenne générale							\bar{Y}	

Notations

- Y_{ij} : valeur de la jème réponse de l'échantillon i
- \bar{Y}_i : moyenne des réponses de la ligne i
- \bar{Y} : moyenne de l'ensemble des réponses = Moyenne des \bar{Y}_i
- N : nombre total de réponses = $k.n$
- E_{ai} : effet du facteur A au niveau i

Dans une colonne, le facteur A est toujours au même niveau. Mais, il existe néanmoins une variation de la réponse due aux facteurs non contrôlés.

On peut calculer :

- pour chaque niveau du facteur A son effet $E_{Ai} = \bar{Y}_i - \bar{Y}$;
- pour chaque essai le résidu $r_{ij} = Y_{ij} - \bar{Y}_i$ qui représente les variations non expliquées par le facteur A .

2.3. Variance globale

La variance globale est la variance observée en considérant l'ensemble des N essais. Elle se calcule par la formule classique de la variance :

$$V_T = \frac{\sum (X_{ij} - \bar{X})^2}{N-1} = \frac{Q_T}{v_T}$$

Le nombre de degrés de liberté étant égal à $N-1 = v_T$.

Cette variance globale se décompose en deux variances :

- la variance résiduelle à l'intérieur des échantillons (V_R) ;
- la variance entre les échantillons (V_A).

2.4. Variance résiduelle

La variance à l'intérieur des échantillons (à l'intérieur des lignes dans notre exemple), est l'effet des facteurs non contrôlés. On la notera Variance résiduelle (V_R).

$$V_R = \frac{\sum (X_{ij} - \bar{X}_i)^2}{k(n-1)} = \frac{Q_R}{\nu_R}$$

Le nombre de degrés de liberté par ligne étant de $n-1$, le nombre de lignes étant k , le nombre de degrés de liberté est donc de $k(n-1) = \nu_R$.

2.5. Variance entre échantillons

La variance entre échantillons (entre les lignes) provient du facteur contrôlé. En effet, si le facteur A n'est pas influent, les moyennes de toutes les lignes seront très proches, la variance entre échantillons sera du même ordre de grandeur que la variance résiduelle. En fait, on pourrait montrer que dans ce cas, V_A est une estimation de V_R . Dans le cas contraire, la variance V_A deviendra importante, elle sera significativement différente de la variance résiduelle.

$$V_A = \frac{n \sum (\bar{X}_i - \bar{X})^2}{k-1} = \frac{Q_A}{\nu_A}$$

Le nombre de ddl (ν_A) est égal au nombre de lignes moins une (nombre de niveaux moins un).

2.6. Equation fondamentale d'analyse de la variance

On peut montrer que la somme des carrés de la totalité des écarts à la moyenne peut se décomposer de la sorte :

$$S_T = S_A + S_R$$

De même, on peut noter que $\nu_T = N-1 = \nu_A + \nu_R$

Pour vérifier si le facteur A n'a pas une influence significative (hypothèse nulle), nous allons comparer les deux estimations de variances V_A et V_R . Pour cela, il faut tester si V_A est du même ordre de grandeur que V_R ou s'il est significativement différent. Nous réaliserons cette comparaison en utilisant le test de Snedecor.

2.7. Test de Snedecor

Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés pour le détail de ce test. Nous nous contenterons ici d'expliquer la méthode.

Le test de Snedecor est un test qui permet de comparer deux variances. Il est donc parfaitement adapté à notre problème puisque nous cherchons à comparer les variances V_A et V_R .

Le rapport V_A/V_R suit une loi de F (loi de Snedecor - figure 7.3) à ν_A et ν_R degrés de liberté si le facteur A n'influe pas sur le résultat de mesure (si les variances sont égales). Cette loi a été tabulée par M. Snedecor qui lui a donné le nom de "loi de F " en l'honneur du statisticien Fischer.

Cette courbe donne la répartition du rapport entre les variances de deux échantillons issus de populations à variances identiques.

Remarque 1

En fait dans cette courbe, seule la partie supérieure nous intéresse, car nous cherchons à montrer que V_A est très supérieure à V_R . Le rapport sera donc toujours supérieur à 1 si l'effet de A est significatif.

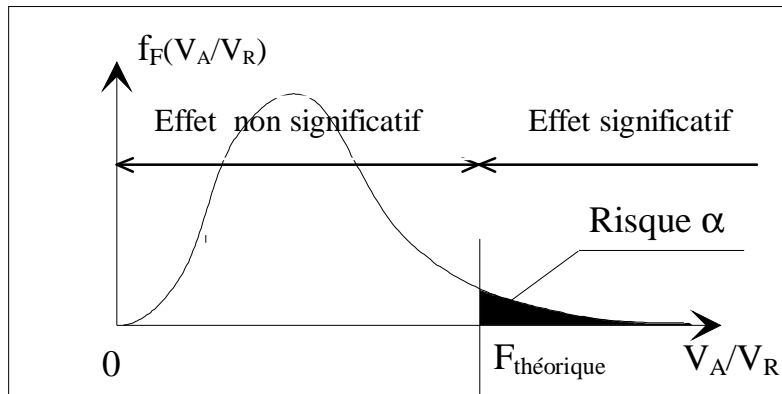


Figure 7.3 - Loi de F

Remarque 2

La courbe nous montre que dans le cadre de l'hypothèse nulle, le rapport peut être égal à l'infini. Cependant, la probabilité est très faible. Pour conclure sur un effet, il faut donc prendre le risque de conclure que cet effet soit significatif alors que nous sommes dans le cadre de l'hypothèse nulle. Nous le noterons risque α . Il est généralement fixé à 5%.

En fonction du risque choisi, la loi de F déterminera un seuil de refus de l'hypothèse nulle que l'on appellera $F_{théorique}$.

Le test consiste donc à comparer le rapport V_A/V_R avec la valeur $F_{Théorique}$ que nous trouvons dans le tableau de la loi de F en fonction :

- de ν_A et ν_R degrés de liberté du facteur étudié et de la résiduelle ;
- du risque α que l'on choisit.

La valeur $F_{Théorique}$ se lit dans le tableau de la loi de Snedecor fournie en annexe. Nous choisissons la colonne correspondant au nombre de ddl de la variance V_A (ν_A) et la ligne correspondant à ν_R . Les deux tableaux correspondent au risque de 5 % et au risque de 1% de ne pas conclure que l'hypothèse nulle est vérifiée alors qu'elle l'est.

Exemple

$\nu_A = 3$, $\nu_R = 13$. Nous trouvons, avec un risque à 5%, $F_{Théorique} = 3,41$.

2.8. Tableau d'analyse de la variance

Afin de simplifier les calculs et la présentation des résultats, on regroupe les calculs dans un tableau qu'on appelle "tableau d'analyse de la variance".

Variation	Σ des carrés	ddl	variances	F_{exp}	$F_{\text{Théo}}$	Significatif?
Entre échantillons	$n \sum_i (\bar{X}_i - \bar{\bar{X}})^2$	$\nu_A = k-1$	$\frac{V_A}{k-1} = \frac{n \sum E_A^2}{k-1}$	$\frac{V_A}{V_R}$	Choisi pour $\nu_A = k-1$	si $F_{\text{exp}} > F_{\text{Théo}}$
Intérieur échantillon	$\sum_{ij} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$	$\nu_R = N-k$	$\frac{V_R}{N-k} = \frac{\sum r_{ij}^2}{N-k}$		$\nu_R = N-k$ α	
Totale	$\sum_{ij} (X_{ij} - \bar{\bar{X}})^2$	$N-1$				

Avec n : nombre de fois où le facteur A est répété sur un niveau.

2.9. Application

Etudions l'influence de trois types de graisses sur le couple à vide d'un moteur. Pour chaque type de graisse, cinq moteurs ont été testés. On est en présence d'un "plan d'expériences" d'un facteur à trois niveaux répété cinq fois.

N°	Facteur	1	2	3	4	5	Moyenne	Effet
1	Graisse 1	2,9	3,2	2,8	2,7	3,5	3,02	0,15
2	Graisse 2	1,8	3,0	2,5	2,3	2,8	2,48	-0,39
3	Graisse 3	2,8	2,8	3,3	3,2	3,5	3,12	0,25
							Moy générale	2,87

L'analyse de la variance donne :

Origine	S^2	ddl	Variances	F_{exp}	F_{limite}	Significatif
Facteur	1,18	2	0,59	4,22	3,88	OUI
Résidus	1,68	12	0,14			
Total	2,87	14				

Ce qui permet de conclure que le type de graisse a bien une influence significative sur le couple à vide des moteurs.

3. Cas des plans d'expériences sans répétition

3.1. Etude sur un exemple

Un plan sans répétition est un plan d'expériences qui n'est réalisé qu'une seule fois. La réponse, correspondant à un essai, est donc obtenue à partir d'une seule expérience.

Reprenons le plan que nous avons établi au premier paragraphe.

Modèle recherché : $Y \sim = M + A + B + C + AB$
ddl 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5

Plan d'expériences :

N°	A	B	C	Y	Y~	r
1	1	1	1	5,0	4,81	+0,19
2	1	1	2	4,7	4,89	-0,19
3	1	2	1	5,1	5,21	-0,11
4	1	2	2	5,4	5,29	+0,11
5	2	1	1	4,8	4,66	+0,14
6	2	1	2	4,6	4,74	-0,14
7	2	2	1	4,7	4,91	-0,21
8	2	2	2	5,2	4,98	+0,22

On calcule rapidement les effets :

$$\begin{aligned}
 E_{A1} &= +0,113 & \text{et } E_{A2} &= -0,113 \\
 E_{B1} &= -0,163 & \text{et } E_{B2} &= +0,163 \\
 E_{C1} &= -0,038 & \text{et } E_{C2} &= +0,038 \\
 I_{A1B1} &= -0,038 & I_{A1B2} &= +0,038 \\
 I_{A2B1} &= +0,038 & I_{A2B2} &= -0,038
 \end{aligned}$$

Dans ce cas, il n'y a plus un seul facteur contrôlé, comme dans le paragraphe 2, mais 3 facteurs et une interaction.

3.2. Variance résiduelle

Dans le cas d'un plan d'expériences, la variance résiduelle est la variance qui n'est pas expliquée par la variation des facteurs contrôlés. C'est donc la variance des écarts entre le modèle théorique et la réponse mesurée.

La variance résiduelle se calcule très rapidement à partir des résidus. En effet, on trouve :

$$V_R = \frac{\sum r^2}{ddl}$$

ddl est le nombre de degrés de liberté des résidus. On le calcule en appliquant la relation suivante :

$N = ddl_{\text{Modèle}} + ddl_{\text{résidus}}$ avec N nombre de lignes du modèle.

Dans le cas étudié :

$$N = 8$$

$ddl_{\text{modèle}} = 5 \rightarrow$ Le nombre de ddl restant pour les résidus est donc de 3.

Pour l'exemple, on trouverait $V_R = 7,4583 \cdot 10^{-2}$

3.3. Variance entre échantillons pour un facteur

Si nous n'étudions que le facteur A , nous nous ramenons au problème précédent. Nous pourrions alors écrire que la variance entre échantillons est égale à :

$$V_A = \frac{S_A}{\nu_A} = \frac{n \sum E_A^2}{\nu_A}$$

Avec $n = 4$ le nombre de répétitions lorsque A est à un niveau
 $\nu_A = 1$ le nombre de degrés de liberté du facteur A

Remarque : n est obtenu en divisant le nombre total d'expériences (N) par le nombre de niveaux du facteur A (n_A). $n = N/n_A$

Nous pouvons donc écrire :

$$V_A = \frac{(N/n_A) \sum E_A^2}{n_A - 1} = \frac{4(0,113^2 + 0,113^2)}{1} = 0,10$$

Evidemment, le même raisonnement pourrait être fait pour les facteurs B et C , nous trouverions :

$$V_B = \frac{(N/n_B) \sum E_B^2}{n_B - 1} = \frac{4(0,163^2 + 0,163^2)}{1} = 0,21$$

$$V_C = \frac{(N/n_C) \sum E_C^2}{n_C - 1} = \frac{4(0,038^2 + 0,038^2)}{1} = 0,01$$

3.4. Variance entre échantillons pour une interaction

Le principe est toujours le même dans le cas des interactions. Il faut repartir de la formule générale :

$$V_A = \frac{S_{AB}}{\nu_{AB}} = \frac{n \sum I_{AB}^2}{\nu_{AB}}$$

Le terme S_{AB} représente la somme des carrés des écarts à la moyenne. Ce terme sera égal à la somme des carrés des effets de l'interaction multipliée par le nombre de répétitions lorsque l'interaction est à un niveau (n).

Remarque : n est obtenu en divisant le nombre total d'expériences (N) par le nombre de niveaux du facteur A (n_A) et du facteur B (n_B).

Nous avons donc : $n = N/(n_A \cdot n_B)$.

V_{AB} n'est autre que le nombre de degrés de liberté de l'interaction.

La variance de l'interaction est donc égale à :

$$V_{AB} = \frac{N/(n_A \cdot n_B) \sum I_{AB}^2}{(n_A - 1)(n_B - 1)} = \frac{2(0,038^2 + 0,038^2 + 0,038^2 + 0,038^2)}{1} = 0,01$$

3.5. Analyse de la variance

Pour chaque effet de facteur et pour chaque interaction, nous pouvons calculer la variance de ceux-ci. L'analyse de la variance consiste à comparer ces variances à la variance résiduelle grâce au test de Snedecor. Ce test se réalise grâce au tableau d'analyse de la variance.

Source	Somme des carrés	ddl	variances	Fexp	Fthéo	Sign?
A	$S_A = \frac{N \sum E_A^2}{n_A}$	$v_A = (n_A - 1)$	$V_A = \frac{S_A}{n_A - 1}$	$\frac{V_A}{V_R}$	$v_1 = n_A - 1$ $v_2 = v_R$	O/N
B	$S_B = \frac{N \sum E_B^2}{n_B}$	$v_B = (n_B - 1)$	$V_B = \frac{S_B}{n_B - 1}$	$\frac{V_B}{V_R}$	$v_1 = n_B - 1$ $v_2 = v_R$	O/N
C	$S_C = \frac{N \sum E_C^2}{n_C}$	$v_C = (n_C - 1)$	$V_C = \frac{S_C}{n_C - 1}$	$\frac{V_C}{V_R}$	$v_1 = n_C - 1$ $v_2 = v_R$	O/N
AB	$S_{AB} = \frac{N \sum I_{AB}^2}{n_A \cdot n_B}$	$v_{AB} = (n_A - 1)(n_B - 1)$	$V_{AB} = \frac{S_{AB}}{v_{AB}}$	$\frac{V_{AB}}{V_R}$	$v_1 = v_{AB}$ $v_2 = v_R$	O/N
Résidus	$S_R = \sum r^2$	$v_R = (N - \text{ddl}_{\text{modèle}})$	$V_R = \frac{S_R}{v_R}$			
Total	$S_T = \sum (Y - \bar{Y})^2$	$N - 1$				

Ce tableau d'analyse de la variance est un tableau qui sera généralisable même dans le cas des plans avec répétitions.

Notations utilisées :

- N : nombre d'essais dans le plan d'expériences ;
- n_A : nombre de niveaux du facteur A ;
- E_A : effet du facteur A ;
- I_{AB} : effet de l'interaction AB ;
- r : résidus ;
- v_1 : premier degré de liberté pour la table de Snedecor ;
- v_2 : second degré de liberté pour la table de Snedecor ;

v_R : nombre de degrés de liberté des résidus ;

O/N : Oui ou Non ;

V_A : variance des effets de A ;

V_R : variance résiduelle.

Application sur l'exemple du paragraphe 1

Source	Somme des carrés	ddl	variances	F _{exp}	F _{théo}	Sign?
A	0,1012	1	0,1012	1,35	10,13	non
B	0,2112	1	0,2112	2,83	10,13	non
C	0,0112	1	0,0112	0,15	10,13	non
AB	0,0112	1	0,0112	0,15	10,13	non
Résidus	0,2239	3	0,0746			
Totale	0,5587	7				

$F_{théorique}$, dans ce cas, est égal à 10,13 au risque de 5%.

Dans ce cas, aucun effet n'est significatif, car pour chaque effet, on trouve :

$$F_{exp} < F_{théo}$$

On retrouve un résultat évident, car, nous avons pris les réponses Y au hasard suivant une répartition de Gauss.

Remarque

On note sur le tableau ci-dessus que l'on retrouve l'égalité fondamentale du paragraphe 2.6. :

$$S_T = S_A + S_B + S_C + S_{AB} + S_R$$

Il est donc possible de déduire S_R sans calculer les résidus pour chaque réponse en appliquant :

$$S_R = S_T - (S_A + S_B + S_C + S_{AB})$$

S_T étant facilement calculée avec une calculette statistique puisque c'est le carré de l'écart-type multiplié par $N-1$.

$$S_T = (N-1) \cdot (\sigma_{n-1})^2 = N \cdot \sigma_n^2$$

4. Cas des plans d'expériences avec répétitions

Étudions le plan d'expériences destiné à identifier le modèle :

$$Y \sim = M + A + B + C + AB$$

$$ddl = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 5$$

Chaque essai a été réalisé trois fois.

Plan d'expériences :

N°	A	B	C	Y1	Y2	Y3	Moyenne
1	1	1	1	6,6	7,0	6,9	6,833
2	1	1	2	3,8	3,6	4,0	3,800
3	1	2	1	8,4	8,1	8,2	8,233
4	1	2	2	4,7	5,5	5,5	5,233
5	2	1	1	5,3	4,5	4,5	4,767
6	2	1	2	1,6	1,8	1,9	1,767
7	2	2	1	5,9	6,0	6,6	6,167
8	2	2	2	3,3	3,0	3,4	3,233

Le calcul des effets se réalise à partir de la moyenne des réponses de chaque expérience. En utilisant les formules traditionnelles de calcul des effets, on trouve :

$$\text{Moyenne} = 5,004$$

$$E_{A1} = +1,021 \quad E_{A2} = -1,021$$

$$E_{B1} = -0,712 \quad E_{B2} = +0,712$$

$$E_{C1} = +1,496 \quad E_{C2} = -1,496$$

$$I_{A1B1} = 0,003$$

L'analyse de la variance, dans ce cas, est très proche de l'analyse de la variance dans le cas où il n'y a pas de répétition. La variance entre les niveaux des facteurs se calcule de façon identique. Par contre, la variance résiduelle se calcule à partir de l'ensemble des $3 \times 8 = 24$ résultats.

Le nombre de degrés de liberté des résidus est, dans ce cas, beaucoup plus élevé que dans le cas précédent.

En effet, dans ce cas, le nombre d'essais dans le plan $N = 24$ (3×8).

Le nombre de degrés de liberté du modèle est de 5.

Il reste donc $24 - 5 = 19$ degrés de liberté pour les résidus.

Ce nombre de degrés de liberté plus important implique un $F_{\text{Théorique}}$ de 4,38 au risque de 0,05. Dans le cas où il n'y a pas de répétitions, on trouverait 18,51 (3 ddl pour les résidus).

N°	A	B	C	Y~	Y1	r1	Y2	r2	Y3	r3
1	1	1	1	6,812	6,6	0,212	7,0	-0,188	6,9	0,088
2	1	1	2	3,820	3,8	0,020	3,6	0,220	4,0	-0,180
3	1	2	1	8,230	8,4	-0,170	8,1	0,130	8,2	0,030
4	1	2	2	5,238	4,7	0,538	5,5	-0,262	5,5	-0,262
5	2	1	1	4,764	5,3	-0,536	4,5	0,264	4,5	0,264
6	2	1	2	1,772	1,6	0,172	1,8	-0,028	1,9	-0,128
7	2	2	1	6,194	5,9	0,294	6,0	0,194	6,6	-0,406
8	2	2	2	3,202	3,3	-0,098	3,0	0,202	3,4	-0,198

En appliquant le tableau d'analyse de la variance (paragraphe 3.5.), on trouve :

Source	Somme des carrés	ddl	variances	Fexp	Fthéo	Significatif?
A	25,01	1	25,01	317,9	4,38	oui
B	12,18	1	12,18	154,9	4,38	oui
C	53,70	1	53,70	215,5	4,38	oui
AB	0,0004	1	0,0004	0,005	4,38	non
Résidus	1,495	19	0,079			
Totale	92,39	23				

On constate que l'on a bien toujours la relation :

$$S_T = S_A + S_B + S_C + S_{AB} + S_R$$

Conclusion : Dans cet exemple, les trois effets principaux sont significatifs, par contre, l'interaction *A* et *B* n'existe pas.

Nous retiendrons donc le modèle :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C \quad \text{soit} \quad Y_{\sim} = 5 + [1 \ -1]A + [-0,7 \ 0,7]B + [1,5 \ -1,5]C$$

5. Exemple d'application de l'analyse de la variance - Méthode du regroupement

On souhaite optimiser les paramètres de réglage de fonctionnement d'une machine à laver industrielle. La réponse mesurée est le nombre de particules restant après lavage par panier. Les paramètres retenus pour ce plan d'expériences sont les suivants :

	Facteurs	Niveaux			
A	Agitation	(1) Oui	(2) Non		
B	Rotation	(1) Oui	(2) Non		
C	Ultrasons	(1) Oui	(2) Non		
D	Durée de lavage	(1)	(2)	(3)	(4)
E	Renouvellement liquide	(1) Ancien	(2) Récent		
F	Rangement des pièces	(1) Rgt 1	(2) Rgt 2		
G	Filtration	(1) Oui	(2) Non		
H	Heure de lavage	(1) Début journée	(2) Après 5 h		

On souhaite étudier outre les facteurs principaux, les interactions *CG*, *BF* et *BC*.

Le plan d'expériences a donné les résultats suivants :

N°	A	B	C	D	E	F	G	H	Y
1	1	1	1	1	1	1	1	1	16
2	2	1	1	4	1	2	2	1	02
3	2	2	1	2	1	1	1	1	25
4	1	2	1	3	1	2	2	1	23
5	1	1	2	2	1	2	1	2	25
6	2	1	2	3	1	1	2	2	50
7	2	2	2	1	1	2	1	2	61
8	1	2	2	4	1	1	2	2	32
9	1	2	2	3	2	1	1	1	51
10	2	2	2	2	2	2	2	1	52
11	2	1	2	4	2	1	1	1	41
12	1	1	2	1	2	2	2	1	35
13	1	2	1	4	2	2	1	2	05
14	2	2	1	1	2	1	2	2	18
15	2	1	1	3	2	2	1	2	00
16	1	1	1	2	2	1	2	2	10

Le calcul du modèle a donné le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
 Y_{\sim} = & 27,875 + [-3,2 \ 3,2] A + [-5,5 \ 5,5] B \\
 & + [-15,5 \ 15,5] C + [4,60,1 \ 3,1 \ -7,9] D \\
 & + [1,4 \ -1,4] E + [2,5 \ -2,5] F \\
 & + [0,1 \ -0,1] G + [2,7 \ -2,7] H \\
 & + {}^t C \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} G + {}^t B \begin{bmatrix} 4,4 & -4,4 \\ -4,4 & 4,4 \end{bmatrix} F + {}^t B \begin{bmatrix} 0,1 & -0,1 \\ -0,1 & 0,1 \end{bmatrix} C
 \end{aligned}$$

Le tableau de l'analyse de la variance est donné ci-dessous :

Actions	Ddl	S. des carrés	Variances	F calculé	F _{limite}	Significatif
A	1	169,00	169,00	4,970	18,51	OUI
B	1	484,00	484,00	14,235	18,51	
C	1	3844,00	3844,00	113,059	18,51	
D	3	372,75	124,25	3,650	19,16	
E	1	30,25	30,25	0,890	18,51	
F	1	100,00	100,00	2,940	18,51	
G	1	0,25	0,25	0,0073	18,51	
H	1	121,00	121,00	3,550	18,51	
CG	1	16,00	16,00	0,470	18,51	
BF	1	306,25	306,25	9,010	18,51	
BC	1	0,25	0,25	0,0074	18,51	
Résidus	2	68,00	34,00			
Total	15	5511,75	367,45			

Cette analyse de la variance conduit à la conclusion que seul l'effet de C est significatif. Tous les autres effets sont non significatifs. Ceci peut surprendre les spécialistes de ce type de machine. En fait, cette conclusion est un peu rapide, car l'analyse de la variance a été réalisée avec deux degrés de liberté sur les résidus ce qui est très faible.

Pour réaliser malgré cela une analyse de la variance, nous allons utiliser la méthode dite "du regroupement" qui consiste à regrouper les interactions qui n'ont visiblement pas d'effets significatifs avec les résidus.

Remarque

Dans le cas où on supprime une interaction ou un facteur, il faut être sûr que ces variables n'ont pas d'effet. Dans le cas contraire, on risque de donner des conclusions erronées. Dans notre cas, en supprimant les interactions BC et CG ainsi que le facteur G nous obtenons comme tableau d'analyse de la variance :

Actions	ddl	Σ des carrés	Variances	F calculé	F _{théorique}	Signif?
A	1	169,00	169,00	10,00	6,61	O
B	1	484,00	484,00	28,64	6,61	O
C	1	3844,00	3844,00	227,46	6,61	O
D	3	372,75	124,25	7,35	5,41	O
E	1	30,25	30,25	1,79	6,61	N
F	1	100,00	100,00	5,92	6,61	N
H	1	121,00	121,00	7,16	6,61	O
BF	1	306,25	306,25	18,12	6,61	O
Résidus	5	84,50	16,90			
Total	15	5511,75	367,45			

Cette nouvelle analyse de la variance est plus vraisemblable que la première. Le modèle retenu est donc : $Y \sim M + A + B + C + D + H + BF$.

Cette méthode n'est pas sans risque de conclure à des résultats erronés. Lorsqu'il est possible de connaître la variance de répétition avec suffisamment de précision par d'autres essais, ou par la connaissance de la machine ou du produit, il est alors préférable de réaliser l'analyse de la variance avec l'estimation de la variance de répétition.

6. Prédiction du nombre de répétitions

Nous allons montrer dans ce paragraphe une méthode simple de détermination du nombre de répétitions qu'il est nécessaire de réaliser pour mettre en évidence un facteur.

La méthode montrée dans ce chapitre est liée à un certain nombre d'hypothèses simplificatrices que le lecteur doit avoir en tête. Les hypothèses permettent de simplifier considérablement les calculs nécessaires, mais ne sont valables - bien sûr - que si l'on est dans - ou au voisinage - de ces hypothèses.

6.1. Hypothèses

On suppose connue la variance résiduelle que l'on aura dans le plan d'expériences. On note cette variance V_r . La connaissance de cette variance ne pose en général pas trop de problèmes. En effet, lorsqu'une entreprise veut faire un plan d'expériences, c'est en général sur une machine ou un produit faisant partie de son savoir-faire. On dispose donc de données permettant d'estimer l'ordre de grandeur de la variance V_r attendue dans le plan d'expériences.

L'effet le plus faible que l'on veut mettre en évidence est connu, on le note E_{mini} . Connaissant E_{mini} et V_r , il est possible d'estimer le nombre de répétitions nécessaire pour qu'un effet E_{mini} soit déclaré significatif.

Pour résoudre ce problème, il faut repartir de l'analyse de la variance. En effet, pour qu'un facteur soit significatif, il faut que le rapport V_A/V_r soit supérieur à $F_{\text{théorique}}$.

Soit k le nombre de répétitions, n le nombre de lignes du plan, en cas de répétition, on a :

$$S_A = \frac{k \cdot n \sum E_A^2}{n_A} \quad \text{d'où} \quad V_A = \frac{k \cdot n \sum E_A^2}{n_A \cdot (n_A - 1)}$$

$$\frac{V_A}{V_r} > F_{\text{théo}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{k}{F_{\text{théo}}} > \frac{n_A \cdot (n_A - 1) \cdot V_r}{n \sum E_A^2}}$$

Avec

- k : nombre de répétitions
- $F_{\text{théo}}$: lu dans la table de Snedecor
- n_A : nombre de niveaux de A
- E_A : plus petit effet que l'on cherche à mettre en évidence
- V_r : variance résiduelle attendue
-

6.2. Etude sur un exemple

On veut réaliser un plan d'expériences sur le dépôt d'un revêtement sur un écran. L'objectif de ce plan d'expériences est d'améliorer la précision sur la quantité déposée. La réponse étudiée est la variance des mesures de 10 produits consécutifs exprimée en milligrammes au carré.

Ce type de production est suivi régulièrement par des études de capabilité. On a montré que l'on pouvait attendre une dispersion résiduelle de variance $V_r = 50 \text{ mg}^2$

Le plus petit effet que l'on recherche dans ce plan est de 5 mg^2 . Quel est le nombre de répétitions nécessaires dans le plan d'expériences sachant que :

- le plan est une L_8 avec un modèle à 7 degrés de liberté ;
- tous les facteurs sont à deux niveaux.

Application au cas où $n_A = 2$, $V_r = 50$ et $E_A = 5$ pour $n = 8$ (L_8)

$$\frac{k}{F_{théo}} > \frac{n_A \cdot (n_A - 1) \cdot V_r}{n \sum E_A^2} = \frac{2 \times 1 \times 50}{8 \times 2 \times 25} = 0,25$$

Le plan est une L_8 avec 7 degrés de liberté. Pour trouver le nombre de répétitions, on fait la petite itération suivante.

- Si on ne fait aucune répétition ; $k = 1$, il reste 1 degré de liberté pour les résidus. Le ratio $k/F_{théo}$ pour 95% est donc égal à $1/161$ est inférieur à $0,25$; le nombre de répétitions est insuffisant
- Si on fait une répétition ; $k = 2$, on aura fait 16 essais, il restera 9 degrés de liberté pour les résidus. Le ratio $k/F_{théo} = 2/5,12 > 0,25$; le nombre de répétitions est suffisant.

Conclusion

Pour mettre en évidence un effet minimal de 5 mg, il faut répéter le plan d'expériences une fois, et donc faire deux essais par ligne.

Chapitre 8

Construction de plans non standard

1. Pourquoi construire des plans particuliers

Les plans d'expériences sont des outils de grande puissance, mais la restriction de l'utilisation des plans aux tables de bases de Taguchi limite l'utilisation de ces outils.

Le lecteur s'apercevra vite que les problèmes qui lui seront posés ne correspondent pas toujours à une table standard de base. Face à cette situation, le premier réflexe que l'on doit avoir consiste à mettre en forme le problème pour le rendre compatible avec les tables standard. Il est néanmoins parfois nécessaire de transformer les tables standard pour les adapter au problème que l'on doit résoudre. L'étude des modifications des tables standard est l'objectif de ce chapitre.

En fait, pour exploiter toute la puissance des tables orthogonales, l'expérimentateur devra faire converger les tables vers le problème et le problème vers les tables.

Pour cela, il lui faudra simplifier et mettre en forme son problème pour le rendre plus apte à être étudié par des tables standard. On a vu en effet, que si l'expérimentateur veut étudier 4 facteurs A, B, C, D comportant respectivement 2, 3, 4 et 5 niveaux, il n'existe pas de plan fractionnaire qui soit orthogonal vis-à-vis d'un tel modèle. Il sera donc préférable de transformer légèrement son modèle, par une modification du nombre de niveaux, pour le rendre compatible avec une table existante.

Une autre approche consiste à modifier les tables standard pour les adapter au problème à résoudre. Cette approche va de la modification simple des graphes de Taguchi, jusqu'à la création d'une colonne à 8 niveaux à partir de colonnes à 2 niveaux.

En associant ces deux approches, il est possible de trouver une solution à la plupart des problèmes industriels et ainsi de donner encore plus de puissance à l'outil plan d'expériences.

2. Technique de modification des graphes linéaires

2.1. Graphes linéaires et interactions

Nous avons vu au chapitre 4 comment utiliser les graphes linéaires associés aux tables de Taguchi pour construire un plan d'expériences. Cependant, il n'est pas rare de trouver des problèmes pour lesquels on ne trouve pas de graphe linéaire adapté. Il faut donc modifier ces graphes. Nous allons voir trois règles de base qui nous permettront de créer de nombreux graphes linéaires à partir des graphes existants.

La construction ou la modification d'un graphe repose sur l'étude de la table triangulaire des interactions. Aussi, nous appuierons notre étude d'exemples pris avec les tables L_8 et L_{27} , les graphes linéaires associés et les tables triangulaires des interactions.

Hypothèses de notation

Pour un tableau à 2 niveaux, l'interaction entre les colonnes a et b sera contenue dans la colonne c . Cette colonne c contient également l'interaction entre les colonnes f et g .

Pour un tableau à 3 niveaux, l'interaction entre les colonnes a et b sera contenue dans les colonnes c et d . Les colonnes c et e contiennent l'interaction entre les colonnes f et g .

Exemple à partir de la table L_8

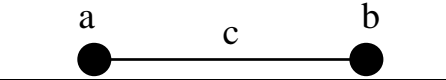
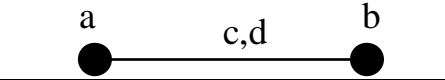
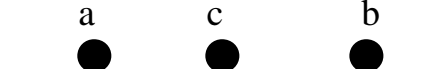

- a représente la colonne 1
- b représente la colonne 2
- c représente la colonne 3
- f représente la colonne 4
- g représente la colonne 7

Exemple à partir de la table L_{27}

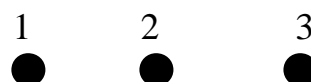
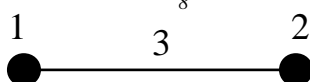
- a représente la colonne 1
- b représente la colonne 2
- c représente la colonne 3
- d représente la colonne 4
- e représente la colonne 7
- f représente la colonne 8
- g représente la colonne 12

2.2. Rupture d'une ligne

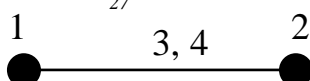
Cette règle est assez évidente, elle consiste à supposer qu'il n'y a pas d'interaction entre les facteurs placés sur les colonnes a et b . Dans ce cas, comme la colonne c est confondue avec une interaction inexistante, on peut l'utiliser pour étudier un facteur.

Détruire	Cas 2 niveaux	Cas 3 niveaux
Avant		
Après		

Exemple à partir de la table L_8



Exemple à partir de la L_{27}



2.3. Formation d'une ligne

Cette règle est la démarche inverse de la règle 1. Elle consiste à supprimer une colonne lorsqu'on souhaite étudier une interaction supplémentaire entre 2 colonnes.

<i>Former</i>	Cas 2 niveaux	Cas 3 niveaux														
Avant	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c	b	●	●	●	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c</td> <td>d</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c	d	b	●	●	●	●
a	c	b														
●	●	●														
a	c	d	b													
●	●	●	●													
Après	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c	b	●	—		●	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c,d</td> <td>b</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c,d	b	●	—		●
a	c	b														
●	—		●													
a	c,d	b														
●	—		●													

Exemple à partir de la table L₈



Exemple à partir de la L₂₇



2.4. Déplacement d'une ligne

Cette règle est la synthèse des deux premières lignes. En effet, déplacer une ligne revient à supprimer une ligne pour la reconstruire plus loin.

<i>Déplacer</i>	Cas 2 niveaux	Cas 3 niveaux																								
Avant	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c</td> <td>b</td> <td>f</td> <td>g</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c	b	f	g	●	—		●	●	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>c, d</td> <td>b</td> <td>f</td> <td>e</td> <td>g</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	c, d	b	f	e	g	●	—		●	●	●		
a	c	b	f	g																						
●	—		●	●																						
a	c, d	b	f	e	g																					
●	—		●	●	●																					
Après	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>b</td> <td>f</td> <td>c</td> <td>g</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	b	f	c	g	●	●	●	—		●	<table style="width: 100%; text-align: center;"> <tr> <td>a</td> <td>d</td> <td>b</td> <td>f</td> <td>c,e</td> <td>g</td> </tr> <tr> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> <td>●</td> <td colspan="2">—</td> <td>●</td> </tr> </table>	a	d	b	f	c,e	g	●	●	●	●	—		●
a	b	f	c	g																						
●	●	●	—		●																					
a	d	b	f	c,e	g																					
●	●	●	●	—		●																				

Exemple à partir de la table L₈



Exemple à partir de la L₂₇



2.5. Exemple de création de graphe linéaire adapté

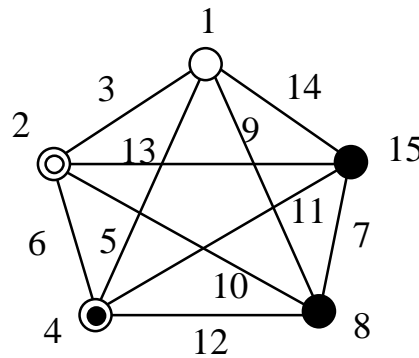
Exemple à partir de la table L_{16}

Supposons que nous cherchions une table dont le modèle serait le suivant :

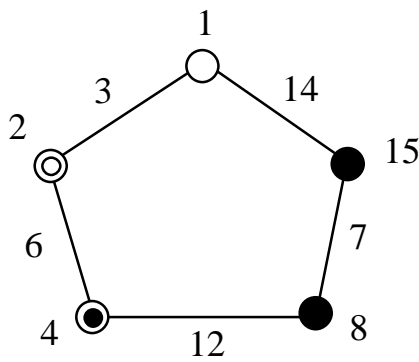
$$Y \sim M + A + B + C + D + E + F + AB + BC + CD + DE + EF + FA$$

Ce plan est assez délicat à construire sans appliquer les méthodes décrites ci-dessus. Pour construire le graphe de notre modèle, nous partons du graphe numéro 1 où les facteurs sont placés en 1, 2, 4, 8, 15.

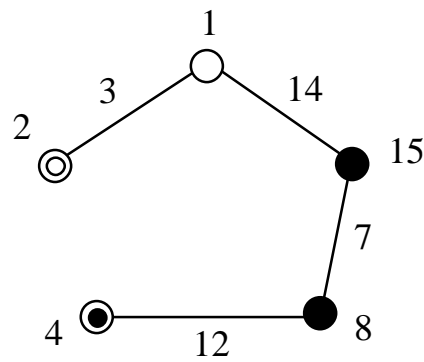
Graphe de départ



Les interactions croisées ne nous intéressent pas, nous allons donc appliquer la règle de rupture et "récupérer" ainsi les colonnes 9, 13, 5, 10 et 11. Le nouveau graphe est alors le graphe modifié numéro 1.



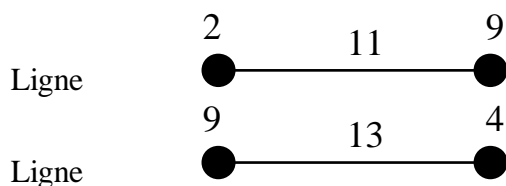
Graphe modifié n°1



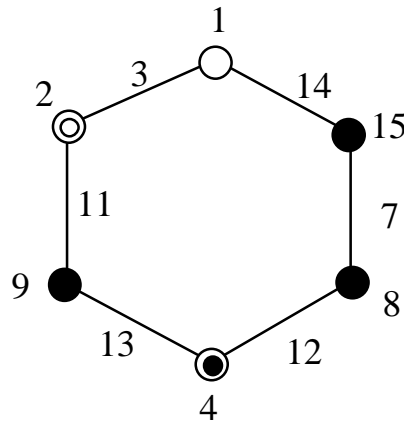
Graphe modifié n°2

La chaîne de 5 facteurs du graphe modifié n°1 doit être ouverte pour laisser la place à un sixième facteur. Le graphe devient alors le graphe modifié n°2.

Le graphe final est obtenu par création de deux lignes :



Le graphe final est donc :



3. Méthode de fusion de colonnes

Cette méthode permet de créer une colonne de 4 niveaux à partir d'une table à 2 niveaux. De même, nous serons capables de créer des colonnes à 9 niveaux à partir de colonnes standard à 3 niveaux. Bien qu'un peu plus complexe de création, nous pourrions également établir une table à 8 niveaux à partir de certaines tables à 2 niveaux.

3.1. Construction d'une colonne à 4 niveaux

Pour expliquer le principe de la méthode, nous allons étudier un exemple à partir de la table L_8 .

Table L_8

	a	b	c	4	5	6	7
	1	2	3				
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2

En regardant le triangle des interactions, nous savons que la colonne 3 est confondue avec l'interaction des colonnes 1 et 2. En combinant les deux colonnes 1 et 2, nous trouvons un facteur à 4 niveaux que nous noterons x :

		b	
		1	2
a	1	x ₁	x ₂
	2	x ₃	x ₄

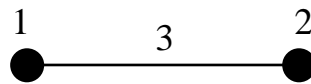
Il est donc possible de remplacer les colonnes a et b par la colonne x . Mais cette colonne x , en raison de sa construction, sera confondue avec la colonne c des interactions entre a et b . Nous ne pourrions plus utiliser cette colonne. Le facteur à 4 niveaux "consomme" 3 colonnes soit autant de colonnes que son nombre de degrés de liberté. Nous pouvons transformer la table L_8 pour étudier 1 facteur à 4 niveaux et jusqu'à 4 facteurs à 2 niveaux en appliquant cette méthode.

Table L_8'

	(1.2.3)	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2
3	2	1	1	2	2
4	2	2	2	1	1
5	3	1	2	1	2
6	3	2	1	2	1
7	4	1	2	2	1
8	4	2	1	1	2

D'un point de vue pratique, nous pouvons établir cette colonne directement à partir des graphes linéaires de Taguchi en appliquant la méthode suivante :

1. Choisir deux points d'un graphe linéaire reliés par un segment



2. Choisir deux des trois colonnes (les deux points par exemple), et combiner ces colonnes pour construire une colonne à quatre niveaux.

3. Construire la nouvelle table.

3.2. Application à partir de la table L_{16}

Nous souhaitons construire un plan, sans interaction entre les facteurs, qui réponde au modèle suivant :

$$Y \sim M + A + B + C + D + E$$

Niveaux	4	4	2	2	2	
Ddl	1	3	3	1	1	= 10

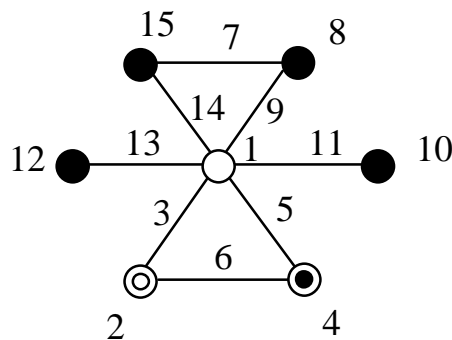
Condition d'orthogonalité

- A ortho à B - N Multiple de 16 ;
- A ortho à C - N Multiple de 8 ;
- C ortho à D - N Multiple de 4.

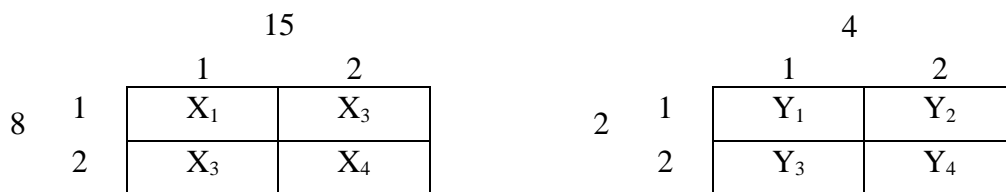
Les autres vérifications n'engendrent pas de condition supplémentaire. Nous trouvons que le plus petit plan capable de répondre à notre problème est un plan à 16 lignes, or il n'existe pas de table standard capable de résoudre ce problème. Nous allons donc construire une table spéciale parfaitement adaptée à notre problème à partir de la table L_{16} rappelée ci-dessous.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1

Pour construire 2 colonnes à 4 niveaux, il faut partir d'un graphe linéaire. Prenons par exemple :



Nous pouvons utiliser les lignes 15-7-8 et 2-6-4 pour construire les colonnes X et Y à 4 niveaux.



La colonne X sera affectée au facteur A.

La colonne Y sera affectée au facteur B.

La colonne I sera affectée au facteur C, 12 au facteur D et 10 au facteur E.

Nous obtenons ainsi le plan :

	C	B	A	E	D
	1	Y	X	10	12
1	1	1	1	1	1
2	1	1	4	2	2
3	1	2	2	1	2
4	1	2	3	2	1
5	1	3	2	2	1
6	1	3	3	1	2
7	1	4	1	2	2
8	1	4	4	1	1
9	2	1	2	1	1
10	2	1	3	2	2
11	2	2	1	1	2
12	2	2	4	2	1
13	2	3	1	2	1
14	2	3	4	1	2
15	2	4	2	2	2
16	2	4	3	1	1

3.3. Construction d'une colonne à 8 niveaux

Nous pouvons également construire à partir d'une table L_{16} , L_{32} ou L_{64} des colonnes à 8 niveaux. Bien entendu, la construction d'une table à 8 niveaux consommera le nombre de colonnes correspondant à son nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire 7 colonnes car une colonne dans une table L_8 , L_{16} ... comporte un seul degré de liberté.

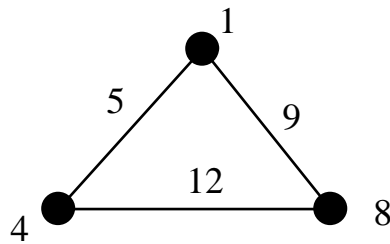
Pour combiner un facteur à 8 niveaux, il faut partir de 3 facteurs à 2 niveaux.

		BC			
		11	12	21	22
A	1	1	2	3	4
	2	5	6	7	8

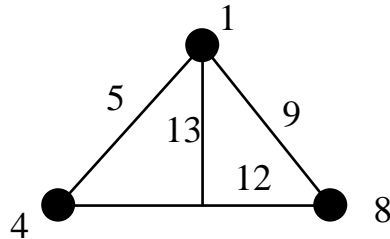
La méthode la plus simple de construction des tables à 8 niveaux consiste à partir des graphes linéaires de Taguchi. Prenons, par exemple, le premier graphe de la table L_{16} duquel nous avons extrait le triangle fermé 1, 4, 8. Les sommets plus les interactions comportent 6 colonnes (1, 4, 8, 5, 9, 12). Il faut considérer la colonne correspondant à l'interaction d'ordre plus élevé, c'est-à-dire entre 1 et 12 ou entre 4 et 9 ou entre 5 et 8. La lecture du triangle des interactions nous montre que ces interactions se retrouvent toutes dans la colonne 13.

La construction d'une colonne à 8 niveaux à partir des colonnes à 2 niveaux (1, 4, 8) consommera 7 colonnes (1, 4, 8, 5, 9, 12, 13) c'est-à-dire le nombre de ddl. D'un point de vue pratique, nous pouvons résumer la méthode par la méthodologie suivante.

1. On extrait d'un graphe linéaire un triangle fermé.



2. On ajoute en consultant le triangle des interactions une ligne correspondant à l'interaction entre un des sommets et la base opposée. Quel que soit le sommet choisi, la colonne sera identique.



3. On combine les niveaux des 3 sommets du triangle pour construire la colonne X à 8 niveaux.

4. On construit la nouvelle table en supprimant les colonnes consommées.

	1	4	8	X	2	3	6	7	10	11	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	1	3	1	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	4	1	1	2	2	2	2	1	1
5	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
6	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
7	1	2	1	3	2	2	1	1	2	2	1	1
8	1	2	2	4	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	1	5	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	6	1	2	1	2	2	1	2	1
11	2	2	1	7	1	2	2	1	1	2	2	1
12	2	2	2	8	1	2	2	1	2	1	1	2
13	2	1	1	5	2	1	2	1	2	1	2	1
14	2	1	2	6	2	1	2	1	1	2	1	2
15	2	2	1	7	2	1	1	2	2	1	1	2
16	2	2	2	8	2	1	1	2	1	2	2	1

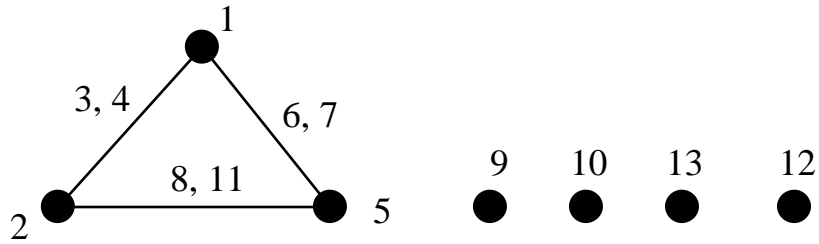
Les colonnes 1, 4 et 8 n'ont été laissées dans la table ci-dessus que pour des considérations pédagogiques.

3.4. Construction d'une colonne à 9 niveaux

Nous pouvons également construire à partir d'une table L_{27} des colonnes à 9 niveaux. Bien entendu, la construction d'une table à 9 niveaux consommera le nombre de colonnes correspondant à son nombre de degrés de liberté, c'est-à-dire 4 colonnes, car une colonne dans une table L_{27} comporte deux degrés de liberté.

D'un point de vue pratique la construction d'une colonne à 9 niveaux est identique à la construction d'une table à 4 niveaux.

1. A partir d'un graphe linéaire de la table L_{27} , on sélectionne deux sommets reliés par une interaction (1 et 2 par exemple).



2. On combine les deux sommets pour construire une colonne à 9 niveaux :

			1	
			1	2
			2	3
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3

3. On reconstruit la table en supprimant les colonnes consommées.

	1	2	X	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	4	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	4	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	4	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	5	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	5	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	5	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	6	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	6	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	6	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	7	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	7	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	7	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	8	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	8	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	8	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	9	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	9	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	9	3	2	1	2	1	3	1	3	2

Les colonnes 1 et 2 n'ont été laissées que pour des considérations pédagogiques.

3.5. Les interactions dans les plans à 4, 8 et 9 niveaux

Nous avons vu comment créer des colonnes à 4, 8 et 9 niveaux, nous allons voir comment étudier les interactions à partir de ces colonnes créées. Pour illustrer notre propos, nous allons nous appuyer sur un exemple de même type que celui étudié au paragraphe 4.2. mais en ajoutant des interactions à notre modèle.

Nous souhaitons construire un plan qui réponde au modèle suivant :

$$Y = M + A + B + C + D + E + AE + DE$$

Niveaux	4	2	2	2	2			
Ddl	1	3	1	1	1	1	3	1 = 12

Conditions d'orthogonalité

- A ortho à B → N multiple de 8
- A ortho à C → N multiple de 8
- A ortho à DE → N multiple de 16
- B ortho à C → N multiple de 4
- B ortho à AE → N multiple de 16

Les conditions sur les ddl et sur l'orthogonalité nous permettent de rechercher ce plan à partir de la table $L_{16} (2^{15})$. Pour construire la colonne à 4 niveaux, il faut partir d'un graphe linéaire. Prenons par exemple :

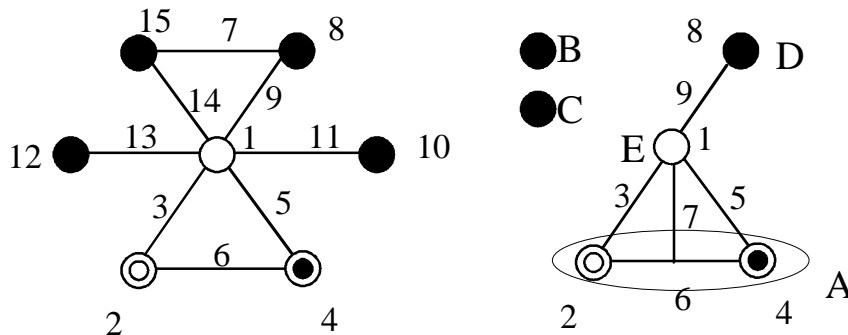


Figure 8.1. Graphe du modèle

Nous pouvons utiliser la ligne 2-6-4 pour construire la colonne du facteur A à 4 niveaux. Si nous choisissons la colonne 1 pour placer le facteur E, l'interaction entre A et E que nous cherchons à étudier se retrouvera dans les colonnes suivantes :

- colonne 3 dans laquelle se trouve l'interaction entre 1 et 2 ;
- colonne 5 dans laquelle se trouve l'interaction entre 1 et 4 ;
- colonne 7 dans laquelle se trouve l'interaction entre 1 et 6 (voir le triangle des interactions de la table L_{16}).

Ainsi, les facteurs A, E et l'interaction AE ont consommé les colonnes 1, 2, 3, 4, 5, 6 et 7. Il nous reste les colonnes 8 à 15 pour placer les facteurs B, C, D et l'interaction DE.

Le facteur D peut être placé en 8 par exemple avec l'interaction DE en 9. Pour les autres facteurs, nous pouvons choisir n'importe quelle colonne libre. Nous choisissons la 10 et la 12 par exemple.

En résumé, nous aurons :

- le facteur *A* affecté à la colonne à 4 niveaux créée à partir des colonnes 2 et 4,
- le facteur *B* en colonne 10, le facteur *C* en colonne 12, le facteur *D* en colonne 8 et le facteur *E* en colonne 1.

Nous obtenons ainsi le plan

	E	A	D	B	C
	1	2,4	8	10	12
1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2
3	1	2	1	1	2
4	1	2	2	2	1
5	1	3	1	2	1
6	1	3	2	1	2
7	1	4	1	2	2
8	1	4	2	1	1
9	2	1	1	1	1
10	2	1	2	2	2
11	2	2	1	1	2
12	2	2	2	2	1
13	2	3	1	2	1
14	2	3	2	1	2
15	2	4	1	2	2
16	2	4	2	1	1

Le calcul des interactions sera réalisé en appliquant la formule générale des interactions.

Conclusions sur les interactions dans le cas des plans à 4, 8 et 9 niveaux

Nous venons de voir qu'il est assez facile de créer des plans possédant de nombreux niveaux. Taguchi suggère de limiter l'emploi des plans possédants de nombreux niveaux et de limiter au maximum l'étude des interactions. Nous pensons en effet qu'il ne faut pas se laisser emporter dans une étude très complexe, surtout pour une première approche. Souvent, les tables à interactions diffuses, telle que la table L_{12} , permettent une bonne approche peu coûteuse.

Il existe cependant des cas où il est difficile de limiter le nombre de niveaux tels que l'étude de matériaux pour laquelle le nombre de niveaux est égal au nombre de matériaux testés.

Dans ce cas, nous pourrions utiliser les méthodes que nous venons de développer. L'étude des interactions est également possible. Pour connaître les colonnes dans lesquelles se retrouveront les interactions lors de l'utilisation de colonnes fusionnées, il suffit de réaliser le petit tableau de la figure 8.2.

	7	8	15
1	6	9	14
2	5	10	13
3	4	11	12

Figure 8.2 - Interaction entre deux colonnes à 4 niveaux

Dans ce tableau, nous avons placé en colonne les lignes ayant servi à construire la première colonne à 4 niveaux (1,2,3), et en ligne la seconde colonne à 4 niveaux (7,8,15).

Les interactions entre les deux colonnes se retrouvent dans les colonnes inscrites dans le tableau. Elles sont trouvées en consultant le triangle des interactions.

Dans ce cas, nous trouvons que les interactions entre les deux colonnes à 4 niveaux se retrouvent dans les colonnes 4, 5, 6, 9, 10, 11, 12, 13, 14. Le lecteur averti retrouvera ici les résultats bien connus de la table $L_{16}(4^5)$.

Ce tableau est facilement généralisable à toutes les situations. Ainsi dans l'exemple de la figure 8.1, pour trouver où se trouve l'interaction entre les facteurs A et E , il suffit de réaliser le petit tableau suivant :

		A		
		2	4	6
E	1	3	5	7

Nous trouvons immédiatement que l'interaction entre A (construit à partir des colonnes 2, 4 et 6) et E (colonne 1) se retrouve dans les colonnes 3, 5 et 7.

4. Les techniques de modification des tables standard

4.1. Technique des niveaux fictifs

Supposons que nous souhaitions étudier 4 facteurs à trois niveaux sans interaction. En saturant la table, nous pouvons utiliser la table $L_9(3^4)$ qui nécessitera 9 expériences.

Supposons maintenant que nous souhaitions étudier 4 facteurs mais avec 3 facteurs à 3 niveaux (B , C , D) et 1 facteur à 2 niveaux (A). Le problème semble *a priori* plus simple que le précédent, pourtant, la seule table de Taguchi qui permette de résoudre ce problème est la table $L_{18}(2^1 \times 3^7)$.

Nous arrivons donc à un problème de taille, la deuxième expérience, *a priori* plus simple que la précédente, à un coût deux fois plus important que la première. La technique des niveaux fictifs permet de résoudre ce problème.

Cette méthode permet d'attribuer à un facteur à m niveaux une colonne à n niveaux à condition que n soit supérieur à m . Pour cela, nous allons de manière fictive, créer un troisième niveau pour le facteur A de l'exemple précédent.

Nous allons considérer un troisième niveau du facteur A qui sera une répétition du niveau 1 ou du niveau 2. Cela revient à considérer que l'effet du facteur au niveau 3 (E_{A3}) est identique à l'effet du facteur au niveau 2 (E_{A2}).

Exemple : le plan doit permettre de tester 2 outils. Nous allons considérer 3 niveaux pour les outils :

Niveau 1	Niveau 2	Niveau 3
Outil 1	Outil 2	Outil 2 de nouveau

On teste un troisième outil parfaitement identique à l'outil n° 2.

Nous pouvons transformer la table L_9 de la manière suivante :

N°	A	B	C	D
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

N°	A	B	C	D
	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	2'	1	3	2
8	2'	2	1	3
9	2'	3	2	1

Où 2' représente la répétition au niveau 2 du facteur A. On pourrait également faire le choix de répéter le niveau 1 du facteur A. Seules les contraintes d'essais permettront de réaliser un choix entre ces deux solutions.

On remarque, sur cet exemple, le gain considérable en nombre d'essais en utilisant cette technique. Nous remarquerons cependant que cette technique ne permet pas la prise en compte des interactions dans un modèle.

4.2. Méthode des facteurs composés

Cette méthode est un peu plus délicate à mettre en œuvre que la précédente, car elle utilise des tableaux dont l'orthogonalité n'est pas parfaite entre tous les facteurs. Néanmoins, elle permet de résoudre un certain nombre de problèmes en gagnant de nombreuses expériences.

Etude sur un exemple

Nous souhaitons étudier un problème sans interaction comportant les facteurs suivants

Facteurs	A	B	C	D	E	Moy
Niveaux	2	2	3	3	3	
ddl	1	1	2	2	2	1

Si nous appliquons les règles classiques pour déterminer le nombre d'expériences nécessaires, nous trouvons:

Nombre de ddl - N supérieur ou égale à 9.

Orthogonalité

A ortho B - N multiple de 4.

A ortho C - N multiple de 6.

C ortho D - N multiple de 9.

N doit donc être un multiple du PPCM (4,6,9) soit un multiple de 36.

Conclusion

En appliquant les règles classiques d'utilisation des tables, le nombre minimal d'expérimentation nécessaire est de 36.

Application de la méthode des facteurs composés

Pour cette méthode, nous allons composer les deux facteurs A et B à deux niveaux pour les étudier à travers un facteur X à 3 niveaux.

Si nous considérons les trois états A_1B_1 , A_1B_2 et A_2B_1 , nous pouvons affecter ces trois états à un facteur X à trois niveaux.

		B		
		1	2	
A	1	A ₁ B ₁	A ₁ B ₂	X ₁ = A ₁ B ₁ X ₂ = A ₁ B ₂ X ₃ = A ₂ B ₁
	2	A ₂ B ₁	A ₂ B ₂	

On peut retrouver facilement les effets globaux de A et de B à partir des effets de X en appliquant les formules suivantes :

$$E_{A2} - E_{A1} = E_{X3} - E_{X1}$$

$$E_{B2} - E_{B1} = E_{X2} - E_{X1}$$

Dans ces conditions, le problème précédent revient à étudier 4 facteurs à 3 niveaux ce qui peut être réalisé à partir de la table $L_9(2^4)$.

Le plan d'expériences sera donc

N°	X	C	D	E
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1

Nous avons divisé par quatre le nombre d'expériences nécessaires pour étudier ce problème.

Remarque importante

Ce gain en nombre d'essais n'est pas sans conséquence sur la précision des résultats obtenus. Dans la méthode des facteurs composés, il y a perte partielle d'orthogonalité. En effet, les facteurs X , C , D et E sont bien orthogonaux entre eux, mais les facteurs A et B ne sont pas orthogonaux aux autres facteurs.

L'utilisation de cette méthode demande quelques précautions lors de l'interprétation des effets et de l'analyse de la variance qui est alors plus délicate.

5. Méthode de l'extraction

Cette méthode consiste à extraire d'une table standard à n lignes, un plan plus petit à m lignes tel que n soit un multiple de m .

5.1. Etude d'un problème

Nous cherchons un plan pour identifier le modèle suivant :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D$$

Niveaux 2 2 2 3

Les considérations habituelles sur le nombre de degrés de liberté et sur l'orthogonalité montrent qu'un plan à 12 lignes convient pour ce problème. Or, si nous nous en tenons aux tables standard, la seule table à 12 lignes est une table ne comportant que des facteurs à 2 niveaux. Il n'est donc pas possible de trouver de façon simple le plan nous permettant d'identifier le modèle.

5.2. Solution par la méthode de l'extraction

Si une table à 12 lignes convient pour résoudre le problème, forcément, une table à 24 ou 36 lignes convient également. Si nous travaillons à partir de la table $L_{36}(2^3 \times 3^3)$, nous retiendrons les colonnes 1, 2 et 3 pour les facteurs à 2 niveaux soit A , B et C et la colonne 4 pour le facteur D à 3 niveaux.

En construisant le plan, on s'aperçoit que les trois premières lignes sont identiques, de même pour les trois suivantes et ainsi de suite. Comme il est inutile de répéter trois fois les mêmes expériences, nous pouvons construire le plan à 12 lignes en ne conservant qu'une ligne parmi trois du plan à 36 lignes. Le plan s'écrit alors :

N°	A	B	C	D
1	1	1	1	1
2	1	2	2	1
3	2	1	2	1
4	2	2	1	1
5	1	1	1	2
6	1	2	2	2
7	2	1	2	2
8	2	2	1	2
9	1	1	1	3
10	1	2	2	3
11	2	1	2	3
12	2	2	1	3

On peut également extraire cette table de la table L_{12} en créant la colonne D , et en ne retenant que les colonnes orthogonales de la table L_{12} par rapport à la colonne D . Pour avoir l'orthogonalité, il faut que lorsque $D = 1$ les autres colonnes soient autant de fois à 1 à 2 et à 3. On remarque que les seules colonnes vérifiant cette propriété sont les colonnes 4, 5, 8 et 10.

En retenant la colonne D et les colonnes 4, 5, 8 et 10, nous pouvons établir un modèle du type :

$$Y_{\sim} = M + A + B + C + D + E$$

Niveaux 2 2 2 3 2

6. Les plans arborescents

6.1. Exposé du problème

Pour l'instant, nous avons toujours considéré que toutes les configurations d'expériences étaient possibles. Or, ce n'est malheureusement pas toujours le cas, et nous devons faire face à des configurations en forme d'arborescence. Dans ces cas, nous pouvons néanmoins appliquer la méthode des plans d'expériences moyennant quelques précautions.

Etudions le cas sur un exemple de vernissage de circuit imprimé.

Un processus pour appliquer une couche superficielle sur un circuit imprimé consiste à :

- appliquer un vernis sur le circuit,
- cuire le circuit pour durcir la couche superficielle.

Nous souhaitons tester :

- 2 types de vernis (Facteur *A*) ;
- 2 méthodes d'application du liquide (Facteur *B*) ;
- 2 types de cuisson (Facteur *C*).

Les deux types de cuisson sont un four conventionnel ou une cuisson par infrarouge.

Pour la cuisson traditionnelle, nous voulons tester 2 facteurs supplémentaires qui sont :

- 2 niveaux de température (Facteur *D*) ;
- 2 niveaux de temps (Facteur *E*).

Pour la cuisson par infrarouge, nous voulons tester 2 facteurs supplémentaires qui sont :

- 2 niveaux d'intensité de lumière (Facteur *F*) ;
- 2 niveaux de vitesse du convoyeur (Facteur *G*).

Ce problème se présente sous la forme d'une arborescence :

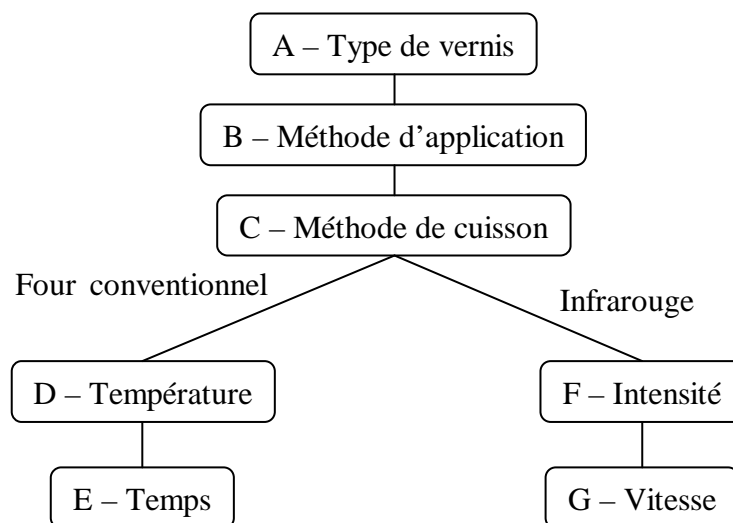


Figure 8.3 - Principe des plans arborescents

Il n'est donc pas possible de combiner tous les niveaux, par exemple, cuisson par infrarouge et température ou four conventionnel et vitesse du convoyeur. En fait, la réalité des expériences en milieu industriel conduit assez souvent à ce type de situation. Lorsqu'on peut, en reformulant le problème se ramener au cas traditionnel, c'est la meilleure des solutions. Mais, si c'est impossible, nous pouvons néanmoins résoudre le problème.

Pour construire le plan correspondant, nous allons utiliser les graphes linéaires. Une vérification des conditions de ddl et d'orthogonalité nous conduit à travailler à partir de la table L_8 .

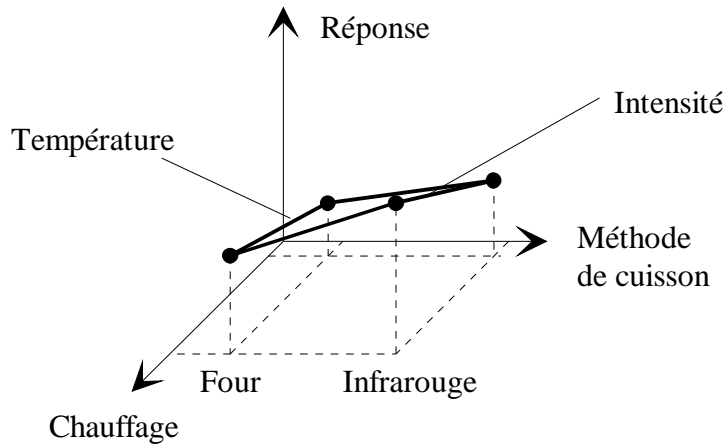
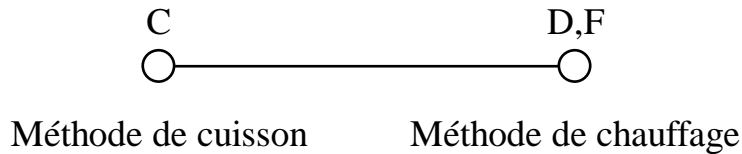


Figure 8.4 - Plans arborescents et interactions

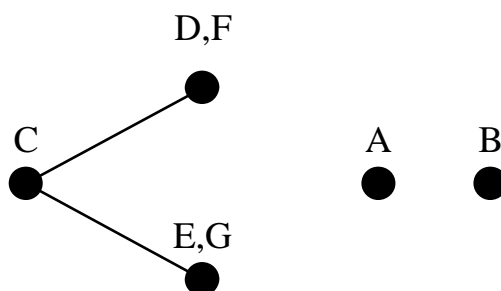
Si nous représentons sur un graphe ce type de problème (Figure 8.4) nous pouvons constater que si l'effet du chauffage n'est pas le même par le four conventionnel que par l'infrarouge, cela se traduira par une interaction.

En fait il faut dans ce problème considérer l'interaction entre la méthode de cuisson et le type de chauffage. Cela se représente sous forme de graphe de la façon suivante :



6.2. Construction du graphe de l'application

1. On affecte au facteur C à l'origine du branchement un sommet.
2. Comme il y a deux branches, nous avons besoin de deux autres sommets reliés au sommet C par une ligne. Ces deux sommets correspondront aux facteurs D, E pour le four conventionnel et F, G pour la cuisson par infrarouge. Les facteurs A et B isolés requièrent également 2 sommets.



3. Il faut trouver un graphe linéaire correspondant au graphe du problème. Dans notre cas, les graphes de la table L_8 sont facilement modifiables pour s'adapter.

Nous affecterons les colonnes aux facteurs suivants :

Facteurs	A	B	C	D,F	E,G
Colonnes	6	7	1	2(3)	4(5)

Les colonnes 3 et 5 doivent rester vides, car, nous le verrons ci-dessous, nous allons utiliser une pseudo-interaction entre les facteurs F et D et entre les facteurs G et E . Les facteurs D et F sont affectés à la même colonne 2. Mais, ils seront affectés en fonction des états du facteur C qui est en colonne 1. Lorsque C est à 1, nous affecterons le facteur D ; lorsque C est à 2, nous affecterons le facteur F .

Les colonnes 1 et 2 seront les suivantes :

N°	1	2
1	C1	D1
2	C1	D1
3	C1	D2
4	C1	D2
5	C2	F1
6	C2	F1
7	C2	F2
8	C2	F2

Il va sans dire que ce tableau n'est pas parfaitement orthogonal. Aussi, les facteurs D et F peuvent avoir des effets sensiblement différents.

La différence $m_{D2} - m_{D1}$ (ou m_{D2} est la moyenne des réponses lorsque D est au niveau 2) est alors différente de $m_{F2} - m_{F1}$.

Cette différence apparaîtra alors comme une interaction entre la colonne 1 et la colonne 2. En effet, l'effet sera le même que si le facteur en colonne 1 influençait le facteur en colonne 2. Ainsi, il est indispensable de ne pas utiliser la colonne 3 pour un facteur. L'effet de ce facteur serait alors confondu avec la pseudo-interaction que nous venons de voir.

Nous construirions de même la colonne 4 pour obtenir le plan d'expériences suivant :

N°	1	2	4	6	7
1	C1	D1	E1	A1	B1
2	C1	D1	E2	A2	B2
3	C1	D2	E1	A2	B2
4	C1	D2	E2	A1	B1
5	C2	F1	G1	A1	B2
6	C2	F1	G2	A2	B1
7	C2	F2	G1	A2	B1
8	C2	F2	G2	A1	B2

6.3. Calcul des effets

Pour le calcul des facteurs non arborescents, le calcul des effets s'effectue de manière identique au cas traditionnel. Par contre, pour calculer les effets des facteurs arborescents, il faut couper le plan en deux sous-plans par la colonne qui a créé l'arborescence. Ainsi, en coupant le plan par la colonne C, on obtient le sous-plan suivant qui nous permet de calculer les effets de D et de E par les méthodes traditionnelles.

N°	2	4	6	7
1	D1	E1	A1	B1
2	D1	E2	A2	B2
3	D2	E1	A2	B2
4	D2	E2	A1	B1

7. Les autres plans d'expériences

Dans l'ensemble de cet ouvrage, nous nous sommes limités à l'étude des plans simples qui sont aussi les plus couramment employés. Notre expérience nous a montré que la plupart des problèmes industriels peuvent se résoudre avec les petites tables comprenant moins de vingt essais. Ce sont ces tables qui doivent être parfaitement connues de l'ensemble des techniciens et ingénieurs de l'industrie. Cependant, il reste quelques cas de figure où les plans d'expériences simples ne peuvent convenir. C'est le cas notamment des plans pour rechercher des surfaces de réponses nécessitant des facteurs à plus de deux niveaux et comportant des interactions disjointes. Nous nous proposons dans ce chapitre de donner quelques indications sur d'autres plans qui peuvent être mis en place. Il n'est pas possible d'être exhaustif dans cet ouvrage car le nombre de plans qui existent est considérable. Chaque année, de nombreuses recherches menées dans le monde viennent enrichir la liste déjà longue des plans ou des stratégies existantes.

7.1. Les matrices d'Hadamard

7.1.1. Définition

Les matrices d'Hadamard H_n sont des matrices carrées d'ordre $n.n$, dont les éléments valent $+1$ ou -1 telles que : ${}^t H_n \cdot H_n = n \cdot I_n$

Avec ${}^t H_n$ transposée de H_n .

Ces matrices permettent de construire les plans d'expériences 2^n . Par cette méthode, on établit rapidement les tables L_8, L_{16}, \dots à partir de la table L_4 .

7.1.2. Construction des matrices d'Hadamard, cas où $n = 2^k$

Dans ce cas de figure assez simple, on retrouve les tables L_8, L_{16}, L_{32} par récurrence à partir de la première matrice

$H_1 = 1$ et de la formule de récurrence $H_{2n} = \begin{bmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{bmatrix}$

On trouve donc : $H_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ et par récurrence $H_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

qui est la table L_4

On trouve également $H_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

qui est la table L_8

7.2. Méthode de Plackett et Burman

Plackett et Burman proposent de construire les matrices d'Hadamard à partir de la première ligne. Le plan d'expériences se déduisant de la matrice d'Hadamard, on peut connaître le plan d'expériences à partir du tableau suivant :

Table	Première ligne
L_8	1 1 1 2 1 2 2
L_{12}	1 1 2 1 1 1 2 2 2 1 2
L_{16}	1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 1 2 2 2
L_{20}	1 1 2 2 1 1 1 1 2 1 2 1 2 2 2 2 1 1 2
L_{24}	1 1 1 1 1 2 1 2 1 1 2 2 1 1 2 2 1 2 1 2 2 2 2
L_{32}	1 1 1 1 2 1 1 2 1 2 2 1 1 2 2 2 2 2 1 1 1 2 2 1 2 2 2 1 2 1 2
L_{36}	1 2 1 2 2 2 1 1 1 2 2 2 2 2 1 2 2 2 1 1 2 1 1 1 1 2 1 2 1 2 1 2 2 1 2

- Les lignes suivantes (sauf la dernière) sont déduites par permutation circulaire de la ligne.
- La dernière ligne ne contient que des 2.

Exemple : construction de la table L_{12} de Plackett et Burman. La première ligne est extraite du tableau précédent, les autres lignes sont trouvées par permutation circulaire.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	2	1	1	1	2	2	2	1	2
1	2	1	1	1	2	2	2	1	2	1
2	1	1	1	2	2	2	1	2	1	1
1	1	1	2	2	2	1	2	1	1	2
1	1	2	2	2	1	2	1	1	2	1
1	2	2	2	1	2	1	1	2	1	1
2	2	2	1	2	1	1	2	1	1	1
2	2	1	2	1	1	2	1	1	1	2
2	1	2	1	1	2	1	1	1	2	2
1	2	1	1	2	1	1	1	2	2	2
2	1	1	2	1	1	1	2	2	2	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Ce plan n'est pas le même que la table L_{12} de Taguchi. Mais elle donne des résultats de même nature.

Chapitre 9

Mise en œuvre des plans d'expériences

Dans les chapitres précédents, nous avons développé les techniques et les méthodes nécessaires à la mise en œuvre des plans d'expériences. Nous allons aborder dans ce chapitre l'ensemble des 7 étapes qu'il convient de suivre pour utiliser toute la puissance de cet outil. La figure 9.1 décrit l'enchaînement logique de ces 7 étapes et permet de situer les principaux intervenants pour chacune d'elles.

- 1 -	Définition des objectifs et des moyens	Décideur & Spécialiste PE
- 2 -	Synthèse du "Savoir-faire"	Spécialiste PE & "Hommes de l'art"
- 3 -	Construction du plan	Spécialiste PE
- 4 -	Conduite des essais	Spécialiste PE & Services opérationnels
- 5 -	Dépouillement & interprétation	Spécialiste PE & "Hommes de l'art"
- 6 -	Validation des résultats obtenus	Spécialiste PE & Services opérationnels
- 7 -	Mise en œuvre et suivi	Décideur & Services opérationnels

Figure 9.1 - Les sept étapes de la mise en œuvre

1. Définition des objectifs et des moyens

1.1. Les acteurs de l'étape

Cette étape s'établit entre le décideur et le spécialiste de la méthode "plans d'expériences". La présence de ces deux acteurs est indispensable pour la réussite de l'étude.

Le décideur

Il doit avoir une autorité suffisante pour permettre de dégager les moyens nécessaires à l'étude. Ces moyens peuvent être financiers, humains, ou en disponibilité de matériel. L'implication du décideur dès le début de l'étude est une condition nécessaire de réussite.

Le spécialiste "plans d'expériences"

Le lecteur s'apercevra que, bien que finalement assez simple dans son principe, la méthode des plans d'expériences demande la présence d'un spécialiste dans son application. Cette présence permet d'éviter de tomber dans les pièges classiques qu'il est difficile de connaître si l'on n'a pas derrière soi un minimum de réalisations. Les entreprises les plus performantes dans l'application des plans d'expériences ont formé des "hommes ressources" qui ont pour tâche de superviser l'ensemble des plans réalisés dans l'entreprise. Ils deviennent alors vite spécialistes compte tenu du nombre important de plans qu'ils supervisent.

1.2. La définition des objectifs

La définition des objectifs consiste à définir, de façon précise, les résultats attendus sur le problème à résoudre. Ces objectifs peuvent être par exemple, l'amélioration de la durée de vie d'un produit, l'amélioration de la "robustesse" ou encore, la modélisation la plus précise possible d'un système.

Cette étape est décisive, elle conditionne la stratégie qui sera appliquée dans l'étape n°2. Pour obtenir le meilleur résultat possible nous conseillons d'utiliser la méthode QQQQCP qui consiste à se poser les questions :

- **QUI** est concerné ?
- de **QUOI** s'agit-il ?
- **OÙ** ?, en quel lieu ?
- **QUAND** ?, à quel(s) moment(s) ?, quel est le planning ?
- **COMMENT** ? Quels sont les matériels, les moyens nécessaires ?
- **POURQUOI** réaliser une telle opération ?

Bien évidemment, pour chaque question, il faudra se poser la question **COMBIEN** ? afin de ne pas arrêter une étude en cours de route faute de budget.

Cette étape consiste également à vérifier que la méthode des plans d'expériences peut s'appliquer au problème à résoudre. Ce n'est pas une méthode miracle. Elle permet de résoudre un grand nombre de problèmes mais sans être pour autant une méthode passe partout. Une erreur souvent réalisée par les débutants est de choisir un problème complexe que l'on a sur les bras depuis dix ans pour s'initier à la méthode. Nous pensons qu'il n'est pas possible de s'initier à la méthode des plans d'expériences tout en résolvant un "mouton à cinq pattes". Il est préférable de choisir des problèmes simples pour s'initier, et laisser les problèmes trop complexes pour plus tard, lorsque l'expérimentateur aura acquis plus d'assurance.

Enfin, il faut dès cette étape définir les moyens nécessaires et notamment les moyens en mesure. Pour cela, il faut identifier les caractéristiques de sortie du système que l'on pourra utiliser comme réponse. On se rappellera qu'il est préférable d'utiliser des variables quantitatives, mais, que l'on peut néanmoins utiliser des variables qualitatives. Il faut également déterminer la méthode de mesure. Ce point peut demander une petite pré étude dans le cas où cette méthode ne fait pas partie du savoir-faire de l'entreprise.

2. Synthèse du savoir-faire

C'est sans aucun doute l'étape la plus importante.

2.1. Les acteurs de l'étape

Cette étape a pour objectif de faire le point sur le savoir-faire de l'entreprise dans le sujet traité. Les principaux acteurs de cette étape seront donc le spécialiste de la méthode et l'ensemble des personnes ayant une compétence dans le domaine. Cette étape repose principalement sur un travail de groupe.

Le spécialiste de la méthode

Son rôle peut se dissocier en trois directions :

- 1. établir le lien entre l'étape n° 1 et l'étape n°2 ;
- 2. former à la méthode le groupe de spécialistes ;
- 3. être l'animateur du travail de groupe.

Le lien entre l'étape n° 1 et l'étape n°2 est évident. Il convient de présenter au groupe de travail, l'objectif de l'étude et l'ensemble des décisions qui ont été prises.

Pour travailler dans de bonnes conditions, l'ensemble du groupe doit connaître un minimum de choses sur les plans d'expériences. Il n'est pas nécessaire que toutes les personnes aient reçu une formation complète, et le rôle du spécialiste est alors de réaliser une petite information qui dure en général une journée. Les points abordés sont :

- la démarche traditionnelle et ses limites ;
- l'intérêt des plans d'expériences ;
- les facteurs principaux et les facteurs bruits ;
- la notion d'interactions ;
- l'interprétation des plans d'expériences.

Enfin, le spécialiste PE devra connaître les bases de l'animation de travail en groupe pour stimuler la mise en commun des connaissances.

Les "hommes de l'art"

Il ne sert à rien de réaliser un plan d'expériences pour découvrir ce que l'on connaît déjà. Aussi, il serait dommage de réaliser un plan d'expériences en oubliant un facteur important. C'est pourquoi il est indispensable de réunir l'ensemble des personnes possédant une connaissance sur le système étudié pour faire une synthèse de ces connaissances. Pour l'étude d'un produit, nous pourrions avoir des personnes du marketing, du service après-vente, du bureau d'étude, du bureau des méthodes, du service qualité...

2.2. Les résultats attendus

2.2.1. Quelle est la réponse ?

Le premier travail du groupe est de parfaitement déterminer quelle est la - ou les - réponse(s) mesurée(s). Cette étape est particulièrement importante. Il faut s'assurer :

- que chaque réponse retenue est bien pertinente avec le problème posé ;
- que l'on sait mesurer chaque réponse retenue avec une bonne capabilité du moyen de mesure ;

- que la mesure possède de bonnes propriétés d'additivité.

Le choix de la réponse n'est pas toujours aussi évident que l'on pourrait le croire ; un bon choix de réponse peut supprimer la nécessité d'étudier des interactions. Par exemple si nous étudions le modèle $U = RI$ bien connu. Il y a évidemment interaction entre la résistance et l'intensité. Mais si nous retenons comme réponse $\log(U)$ à la place de U et comme facteurs $\log(R)$ et $\log(I)$. Le modèle s'écrit $\log(U) = \log(R) + \log(I)$; il n'y a plus interaction.

2.2.2. Rechercher les facteurs

Il s'agit également de rechercher l'ensemble des facteurs influents sur le procédé. Le travail de groupe aboutit généralement à l'identification d'au moins une vingtaine de facteurs influents. Nous conseillons même de ne pas arrêter la recherche de facteurs influents tant que l'on n'a pas identifié au moins vingt facteurs.

Une fois la liste exhaustive établie, le groupe de travail doit classer les différents facteurs, les regrouper si nécessaire, afin de limiter le nombre.

Les facteurs identifiés seront classés en deux types :

- les facteurs contrôlés ;
- les facteurs bruits.

On sélectionnera ensuite les facteurs que l'on souhaite retenir pour le plan d'expériences. Bien souvent parmi la vingtaine de facteurs évoqués lors du brainstorming, certains seront considérés par les spécialistes comme peu intéressants pour l'étude **en fonction des objectifs fixés**.

Pour chacun des facteurs retenus, il faut alors définir :

- Le domaine de validité, c'est-à-dire le domaine dans lequel on souhaite connaître l'influence de celui-ci. Ce domaine doit être établi avec le maximum de précautions. Il arrive souvent que la définition de ce domaine demande quelques études complémentaires.
- Le nombre de niveaux, ainsi que leurs valeurs. Il faut être également attentif lors de cette étape. Les membres du groupe ont souvent tendance à fixer un nombre de niveaux élevé, ce qui conduit à un nombre d'essais important. Nous conseillons de fixer le nombre de niveaux à 2 à moins qu'un nombre de niveaux plus élevé soit parfaitement justifié.

2.2.3. Choisir la stratégie

Enfin, il est indispensable de décider de la stratégie qui sera retenue en fonction de l'objectif. Celle-ci peut être de deux types :

- recherche de nominale, on s'orientera alors vers un modèle assez complet avec étude des interactions ;
- recherche d'extremum, qui conduira davantage vers un modèle sans interaction en utilisant les tables de type L_{12} ou L_{18} .

En fonction de la stratégie retenue, il faut déterminer les interactions susceptibles d'être recherchées. En cas de doute sur les interactions, on s'orientera prioritairement vers une table de résolution IV.

3. Construction du plan

3.1. Les acteurs de l'étape

Lorsque les deux premières étapes ont été correctement menées, le spécialiste PE dispose de tous les renseignements indispensables à la construction du plan d'expériences. Bien évidemment, en bon spécialiste, il aura orienté l'étape 2 de manière à construire un plan optimum. Il aura évité de prendre des nombres de niveaux premiers entre eux par exemple, ou aura établi soigneusement les interactions qu'il était indispensable de retenir pour l'étude. A partir de ce moment, il peut construire le plan seul. Nous conseillons cependant aux entreprises de créer un groupe d'hommes ressource dont nous avons déjà parlé, et de faire établir le plan par ce groupe. Cette méthode permet de profiter de chaque plan pour enrichir l'expérience de chacun des membres du groupe.

3.2. Les résultats attendus

L'établissement du plan d'expériences se réalise en suivant la démarche exposée dans cet ouvrage. On peut la résumer dans les cas simples par les trois points suivants :

- sélectionner la table appropriée ;
- affecter une colonne à chaque facteur contrôlé ;
- éventuellement établir le tableau pour les facteurs bruits dans le cas d'un plan produit.

Dans les cas plus complexes, il sera nécessaire de modifier les tables existantes en utilisant les techniques développées dans le chapitre 7, ou d'utiliser un logiciel de génération de plan disponible sur le marché.

Cette étape conduit à préparer la liste des expériences à réaliser, le planning, et éventuellement le nombre de répétitions de chaque expérience nécessaire. Dans l'établissement du planning, il faudra être attentif à ce que toutes les expériences soient réalisées dans des conditions semblables pour éviter qu'un facteur non pris en compte dans l'étude ne vienne perturber celle-ci. En cas d'impossibilité, il faut alors recourir à la méthode des blocs que nous avons définie au chapitre 4, paragraphe 11.

Le nombre de répétitions est conditionné par la répétabilité des résultats obtenus lorsque tous les facteurs étudiés sont figés. Lorsque cette répétabilité est bonne et que le nombre de degrés de liberté des résidus est suffisant pour l'analyse de la variance, alors, il n'est pas utile de répéter les expériences. Le nombre de répétitions nécessaires à l'étude sera d'autant plus important que la répétabilité est mauvaise. Nous avons proposé au chapitre 7 paragraphe 7 une méthode pour calculer le nombre de répétitions nécessaires.

4. Conduite des essais

4.1. Les acteurs de l'étape

Les principaux acteurs de cette étape seront les services opérationnels qui réalisent les essais. Cependant, cette étape ne peut se réaliser sans la présence du spécialiste PE. Son rôle sera de superviser les essais et de surveiller qu'ils se déroulent tels que prévu. Les services opérationnels pourront être les services d'essais ou de production selon l'étude réalisée.

4.2. La validation du nombre de répétition

Comme nous l'avons déjà précisé, le nombre de répétitions nécessaires dépend entre autres de la dispersion des résultats lorsque tous les facteurs étudiés sont figés. Quelquefois, cette dispersion est connue et fait partie du savoir-faire de l'entreprise. Mais dans la majorité des cas, cette dispersion est inconnue. Il est alors fondamental de bien connaître cette dispersion avant de réaliser le plan d'expériences.

Une des méthodes de vérification consiste à répéter le premier essai au moins quatre fois et de faire une estimation de la variance résiduelle à partir de ces quatre essais. Pour qu'un effet soit significatif, il faut que la variance des effets des facteurs soit supérieure à la variance résiduelle (voir le chapitre 7). Il est donc fondamental de vérifier si la variance résiduelle n'est pas trop forte.

Cas d'une variance très forte

En cas de variance trop forte, il sera difficile de faire ressortir des effets significatifs, et on risque de ne rien pouvoir conclure à l'issue de ce plan. Il faut donc arrêter les essais dès la première expérience.

L'origine d'une trop forte dispersion de mesure peut être la présence de facteurs importants non pris en compte dans le plan, ou encore un système de mesure inadapté à l'étude en cours. Le spécialiste PE devra alors identifier le problème et le résoudre.

En cas de présence de facteurs importants non pris en compte dans le plan, il est alors probable que l'étape 2 n'a pas été réalisée de façon correcte. Des facteurs ont été sous-évalués, il faut recommencer le processus à partir de l'étape 2. Bien entendu, dans ce cas il est inutile de continuer les expériences du plan.

En cas de dispersion liée au moyen de mesure, il faut alors essayer de fiabiliser la mesure soit par une amélioration du procédé, soit par un changement du système de mesure - s'il existe !

Quelle que soit l'origine d'une forte variance, le problème n'est jamais simple. Si un facteur a échappé aux spécialistes dans la phase 2, ou si le système de mesure retenu n'est pas adapté, cela signifie que le savoir-faire de l'entreprise n'est pas suffisant pour aborder l'étude de ce système. Des études complémentaires sont alors nécessaires pour comprendre l'origine de la dispersion. Il nous est arrivé de réaliser alors un plan d'expériences pour comprendre l'origine des dispersions.

Cas d'une variance moyenne

En cas de variance moyenne, il faut bien entendu chercher à comprendre l'origine de ces dispersions, et si possible les réduire, mais le plan n'est pas forcément remis en question. En effet, si le coût des essais n'est pas trop important, on peut résoudre le problème en répétant plusieurs fois les expériences.

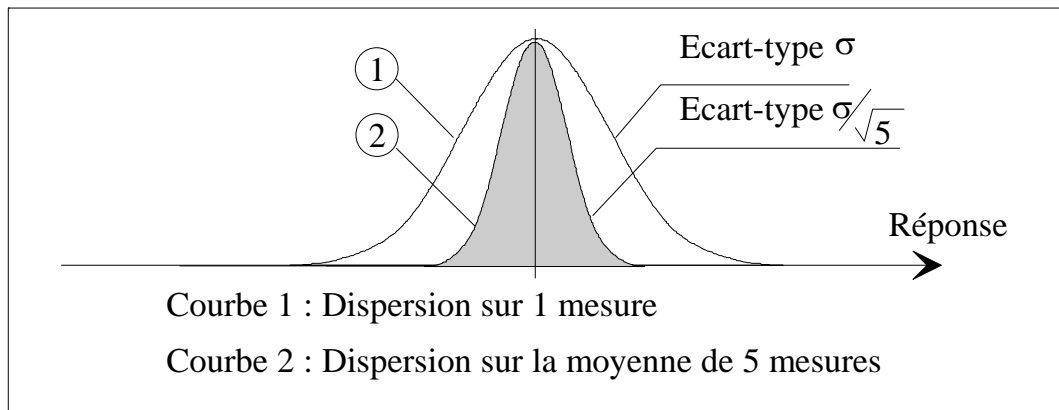


Figure 9.2 - Répétition des expériences

La figure 9.2 nous montre l'effet sur la dispersion d'une répétition. Considérons un système possédant une dispersion d'écart-type σ . En répétant n fois l'expérience, la moyenne de ces n expériences possède alors une dispersion de σ divisé par la racine carré de n . Ainsi si on répète cinq fois chaque expérience, la dispersion se trouvera réduite par un facteur de 2,23.

Cas d'une variance faible

C'est bien entendu le cas idéal. Cela signifie que le système de mesure est adapté, et que les facteurs pris en compte dans le plan sont probablement les facteurs les plus importants.

4.3. Les résultats attendus

Les résultats de cette étape se traduisent simplement par les réponses mesurées sur l'ensemble du plan d'expériences. On prendra soin d'ouvrir un "cahier d'essais" sur lequel on notera tous les événements qui ont pu se produire au cours des essais. L'expérience montre que ce cahier est fort utile lors du dépouillement et de l'interprétation du plan. En cas de répétition, on prendra également soin de ne pas conserver que la moyenne des résultats. On préférera l'ensemble des résultats mesurés afin de ne pas perdre d'informations et réaliser éventuellement quelques études complémentaires comme des études de normalité.

5. Dépouillement et interprétation

5.1. Les acteurs de l'étape

Le dépouillement du plan d'expériences consiste principalement à :

- calculer les coefficients du modèle ;
- établir les graphes des effets ;
- calculer les résidus ;
- faire l'analyse de variance pour déterminer les effets significatifs.

Cette phase ne présente aucune difficulté, nous l'avons largement abordée dans cet ouvrage. Elle est réalisée par le spécialiste PE qui pourra s'aider utilement d'un tableur ou d'un logiciel spécialisé.

Par contre, l'interprétation des résultats est souvent plus délicate. Il est indispensable d'associer à cette phase le groupe de spécialistes qui a déjà travaillé lors de l'étape 2. Les experts pourront valider les résultats du plan ou, en cas de doute, proposer des études complémentaires. De plus, les résultats d'un plan d'expériences apportent souvent de nombreuses connaissances à l'entreprise qu'il est utile de diffuser.

5.2. L'interprétation

L'interprétation consiste à :

- analyser les résultats en fonction de la stratégie retenue (recherche de nominale ou d'extremum) ;
- sélectionner les niveaux des facteurs qui donnent les résultats optimaux ;
- calculer la réponse théorique pour la configuration optimale.

Le travail est généralement un travail de groupe animé par le spécialiste PE. En plus des objectifs cités plus haut, l'interprétation devra valider les résultats obtenus, et vérifier la cohérence des essais notamment par l'étude des résidus (présence d'un résidu particulièrement élevé) et éventuellement par comparaison avec l'expérience de l'entreprise.

6. Validation des résultats obtenus

6.1. Pourquoi valider les résultats obtenus

Nous avons vu au chapitre 3 que le principe d'un plan d'expériences fractionnaire est de ne pas faire une expérience à chaque nœud du maillage, mais à certains points particuliers. Le modèle trouvé peut donc être adapté aux nœuds du maillage testé, mais pas sur l'ensemble du domaine de validité des facteurs. L'interprétation a permis de trouver la configuration optimale pour l'ensemble des facteurs. Il est peu probable que la configuration optimale fasse partie des configurations testées lors du plan d'expériences. L'expérimentateur devra donc vérifier que la prédiction donnée par le modèle ne s'éloigne pas trop de la réalité. En fait, on vérifiera que le modèle théorique donne une bonne "image" du système au voisinage de la configuration optimale. Le minimum de prudence conseille de vérifier cette hypothèse avant d'adopter définitivement les conclusions du plan.

6.2. Les acteurs de cette étape

L'essai de confirmation va demander la participation active du spécialiste PE qui validera par cet essai le modèle retenu à l'issue du plan. Comme pour la réalisation du plan, les services opérationnels seront mis à contribution pour cette étape.

6.3. Les résultats attendus

Les résultats attendus lors de cette étape dépendent de la stratégie retenue lors du plan.

Dans le cas d'un plan simple, il suffit de vérifier si le résultat est conforme aux résultats attendus lorsque tous les facteurs sont configurés dans la position optimale.

Dans le cas d'un plan produit, il faut - si possible - réaliser une double vérification. Il faut en effet vérifier que la réponse est conforme à ce que le modèle avait prédit, mais aussi vérifier que le rapport Signal/Bruit est optimum. Pour cela, il est conseillé de figer les paramètres principaux, et de réaliser la ligne des essais pour toutes les configurations du plan bruit.

Lorsque l'essai de confirmation ne donne pas satisfaction, il faut établir l'origine de cet écart qui peut être :

- une erreur de calcul dans le modèle théorique ;
- une erreur dans la conduite des expériences ;
- un facteur influent non considéré dans le plan d'expériences ;
- une interaction forte non retenue dans le modèle.

Nous avons déjà discuté ce point dans le chapitre 4 paragraphe 9.6., nous résumerons donc simplement les actions susceptibles d'être menées dans ce cas :

- réalisation d'autres expérimentations ;
- remise en question du modèle ;
- modification de l'optimisation pour obtenir une meilleure correspondance entre le modèle et la réalité.

7. Mise en œuvre et suivi

On ne fait pas des plans d'expériences pour se faire plaisir. Il est important que les résultats obtenus par le plan d'expériences soient mis en pratique. La meilleure solution pour cela est d'impliquer à ce stade de l'étude le décideur. Il n'est pas rare de voir des entreprises progresser énormément au niveau de la connaissance grâce à un plan sans que ces connaissances soient mises en pratique. La mise en œuvre d'une amélioration est toujours plus ou moins contraignante, et il est utile pour l'animateur de la démarche de savoir convaincre ses partenaires de l'utilité de la mise en œuvre des modifications.

Lorsque la démarche de mise en œuvre a été réalisée telle que nous l'avons décrite dans ce chapitre, le suivi sera facilité. En effet, le décideur sera impliqué dès les premières heures de l'étude. Il sera bien entendu tenu au courant de l'avancement des travaux. De plus, le groupe de spécialistes formé pour l'étape 2 devra être choisi pour ses compétences, mais aussi dans un choix stratégique pour faciliter la mise en œuvre. Il est en effet plus facile de convaincre quelqu'un qui a participé à l'étude plutôt que d'imposer une solution.

L'animateur de la démarche ne doit pas considérer son rôle terminé à l'issue de l'étape 6. Il doit se sentir impliqué dans la mise en œuvre et le suivi des résultats qu'il a contribué à obtenir.

Nous terminerons cet ouvrage par deux petites maximes qui doivent être bien admises par l'ensemble des techniciens qui utiliseront cette méthode. Car, bien que l'application des plans d'expériences soit passionnante, il ne faut pas se laisser emporter par sa fougue, et toujours situer son action dans une démarche de Qualité Totale.

La réussite d'un plan d'expériences ne se mesure pas à la complexité du modèle obtenu mais à la satisfaction qu'il a générée chez le client.

Les plans qui marchent le mieux sont ceux qui marchent le moins.

La seconde maxime peut paraître surprenante, mais notre expérience nous a montré qu'il n'existe pas de plans d'expériences qui ne marche pas. En effet, lorsque le problème est maîtrisé au départ par l'industriel, la méthode des plans d'expériences va donner d'excellents résultats sous la forme d'une modélisation. Mais l'industriel n'aura pas progressé de façon importante sur le sujet. Par contre, lorsqu'un plan d'expériences donne des résultats bizarres, avec peu de facteurs significatifs, ce n'est pas la méthode qu'il faut remettre en question mais le travail de synthèse des connaissances. Il est probable que les connaissances de l'entreprise sur le sujet abordé sont faibles. Le plan d'expériences aura révélé ces faiblesses, et permettra de déclencher un travail en profondeur pour combler ces lacunes. C'est alors que l'entreprise progresse.

Annexes

Principales tables de Taguchi

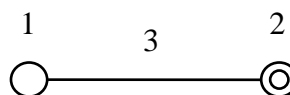
Les tables de Taguchi sont reproduites avec l'aimable autorisation de "American Supplier Institute" de Dearborn, Michigan (USA), organisme ayant pour vocation d'améliorer la qualité industrielle dans le monde entier.

Rappel des symboles utilisés :

Symbole	Groupe	Difficulté de modification des niveaux
○	1	Difficile
◎	2	Assez difficile
⊙	3	Assez facile
●	4	Facile

Table L₄ (2³)

	1	2	3
1	1	1	1
2	1	2	2
3	2	1	2
4	2	2	1
	a	b	a b
Groupe	1	2	



	2	3
(1)	3	2
(2)	1	

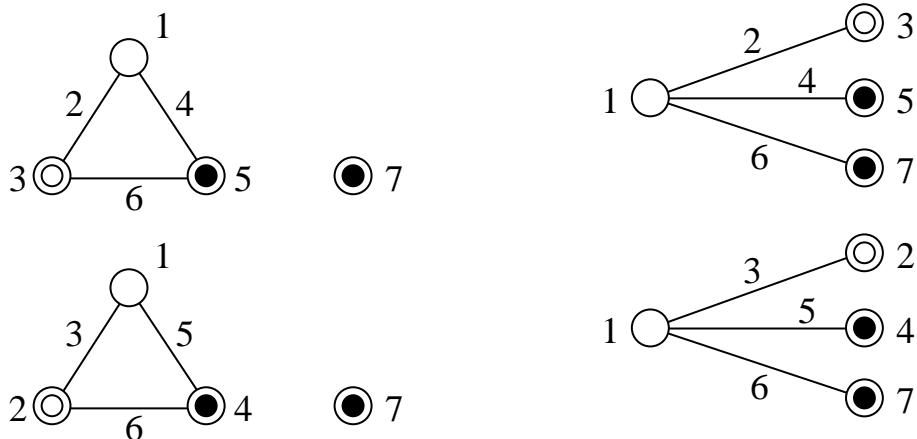
Table L₈ (2⁷)

N°	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	2	2	2	2
3	1	2	2	1	1	2	2
4	1	2	2	2	2	1	1
5	2	1	2	1	2	1	2
6	2	1	2	2	1	2	1
7	2	2	1	1	2	2	1
8	2	2	1	2	1	1	2
	a	b	a b	c	a c	b c	a b c
Groupe	1	2		3			

Triangle des interactions entre deux colonnes

	2	3	4	5	6	7
(1)	3	2	5	4	7	6
(2)		1	6	7	4	5
(3)			7	6	5	4
(4)				1	2	3
(5)					3	2
(6)						1

Graphe des effets



Résolution	Nombre maximum de facteurs	Colonnes à utiliser
Plan complet	3	1, 2, 4
IV	4	1, 2, 4, 7 ou 1, 3, 5, 7
III	7	Toutes

Table L₉ (3⁴)

N°	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	2	2	2
3	1	3	3	3
4	2	1	2	3
5	2	2	3	1
6	2	3	1	2
7	3	1	3	2
8	3	2	1	3
9	3	3	2	1
	a	b	a	a
			b	b ²
Groupe	1		2	

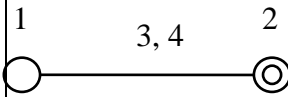


Table L₁₂ (2¹¹)

La table L₁₂ est une table spéciale dans laquelle les interactions sont distribuées uniformément (en plus ou en moins du tiers de l'interaction) dans toutes les colonnes. Il n'y a pas de graphe pour cette table, elle ne peut donc pas être utilisée pour étudier des interactions.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2
4	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2
5	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1
6	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1
7	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1
8	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2
9	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1
10	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2
11	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2
12	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1
Groupe	1		2								

Table L₁₂ (3¹x2⁴)

Cette table ne fait pas partie des tables standard de Taguchi mais présente néanmoins un intérêt. Elle ne permet pas d'étudier des interactions.

N°	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2
3	1	2	1	1	2
4	1	2	2	2	1
5	2	1	1	1	2
6	2	1	2	2	2
7	2	2	1	2	1
8	2	2	2	1	1
9	3	1	1	2	1
10	3	1	2	1	1
11	3	2	1	2	2
12	3	2	2	1	2

Table L₁₂ (3¹x2³)

Cette table ne fait pas partie des tables standard de Taguchi mais présente néanmoins un intérêt. Elle permet d'étudier trois interactions jointes.

N°	1	2	3	4
1	1	1	1	1
2	1	1	2	2
3	1	2	1	2
4	1	2	2	1
5	2	1	1	1
6	2	1	2	2
7	2	2	1	2
8	2	2	2	1
9	3	1	1	1
10	3	1	2	2
11	3	2	1	2
12	3	2	2	1

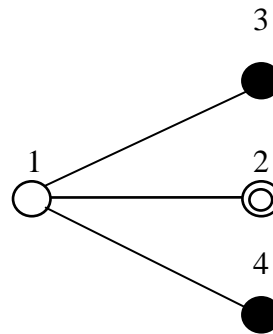


Table L₁₆ (2¹⁵)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2
4	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
5	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
6	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
7	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
9	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
10	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
11	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
12	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
13	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
14	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
15	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2
16	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1
	a	b	a	c	a	b	a	d	a	b	a	c	a	b	a
			b		c	c	b		d	d	b	d	c	c	b
							c				d		d	d	c
															d
Groupe	1	2	3				4								

Résolution	Nombre maximum de facteurs	Colonnes à utiliser
Plan complet	4	1, 2, 4, 8
V	5	1, 2, 4, 8, 15
IV	8	1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14 ou 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15
III	15	Toutes

Table L₁₆ - Triangle des interactions

	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14
(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	
(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12		
(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11			
(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10				
(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9					
(7)	15	14	13	12	11	10	9	8						
(8)	1	2	3	4	5	6	7							
(9)	3	2	5	4	7	6								
(10)	1	6	7	4	5									
(11)	7	6	5	4										
(12)	1	2	3											
(13)	3	2												
(14)	1													

Table L₁₆ - Graphes de résolution V (Taguchi)

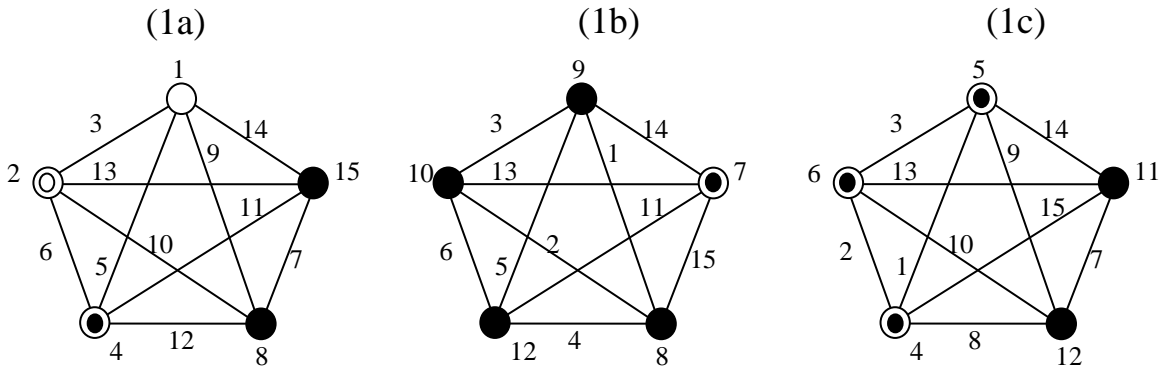


Table L₁₆ - Graphes de résolution III (Taguchi)

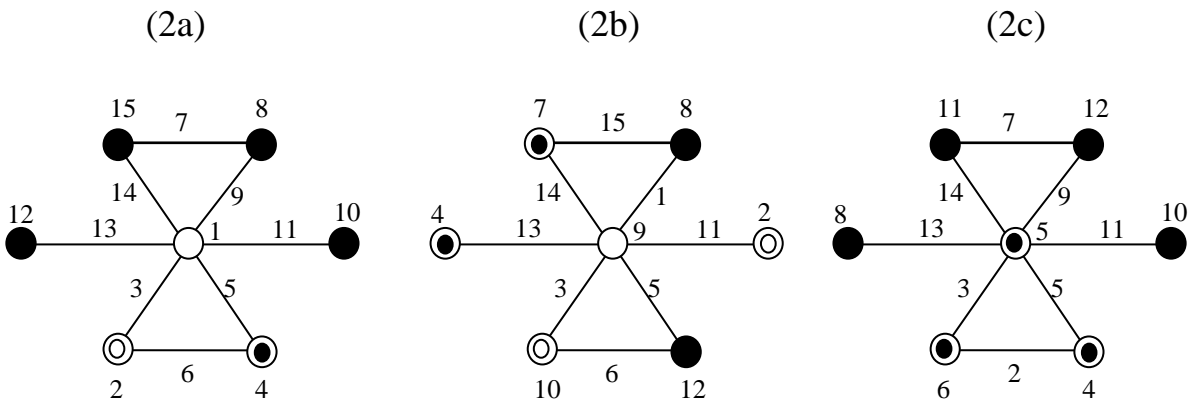


Table L₁₆ - Graphes de résolution III (Taguchi - Suite)

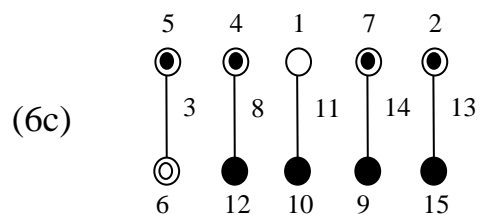
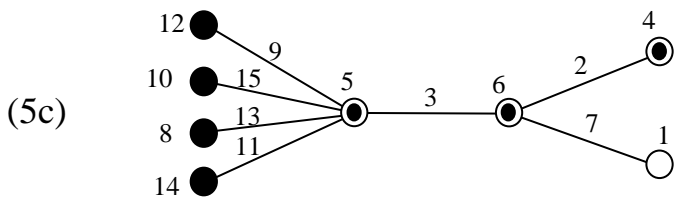
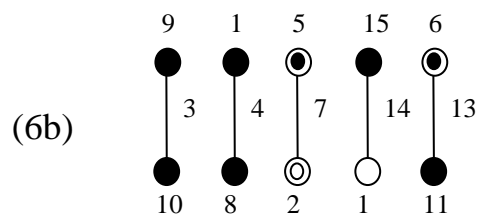
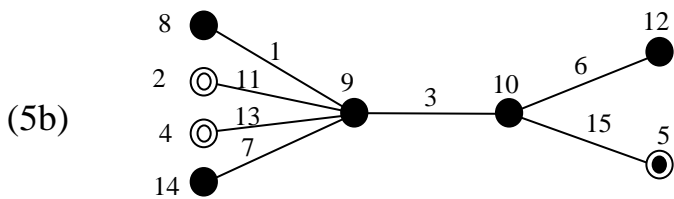
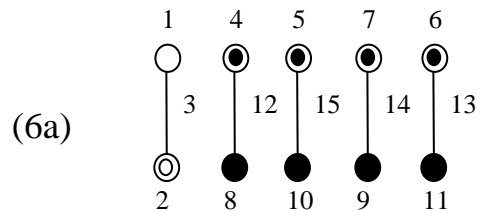
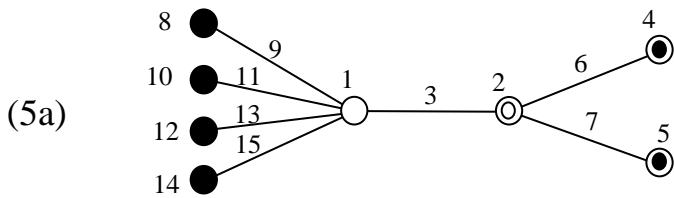
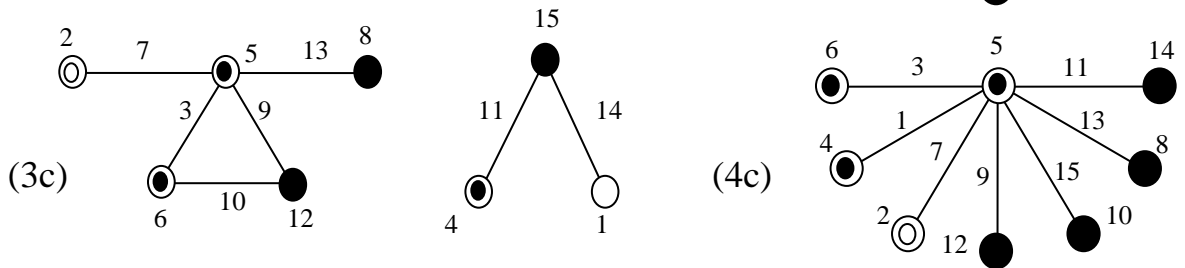
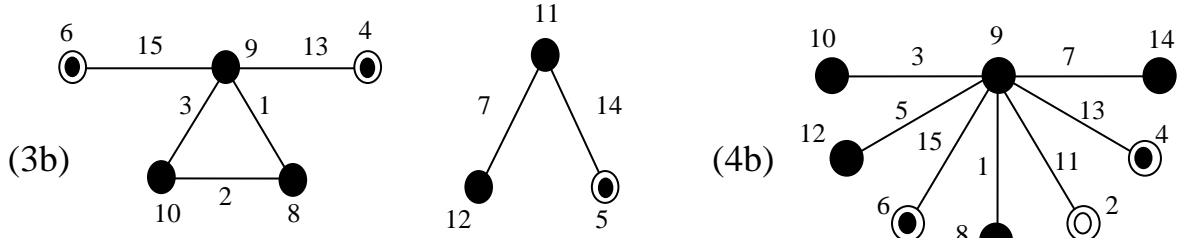
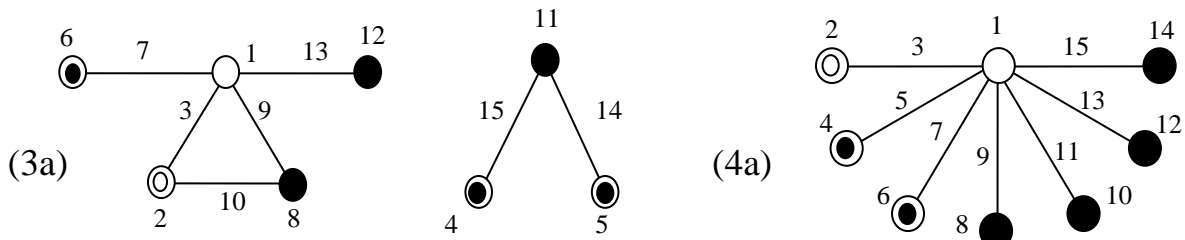


Table L₁₆ - Graphes de résolution IV

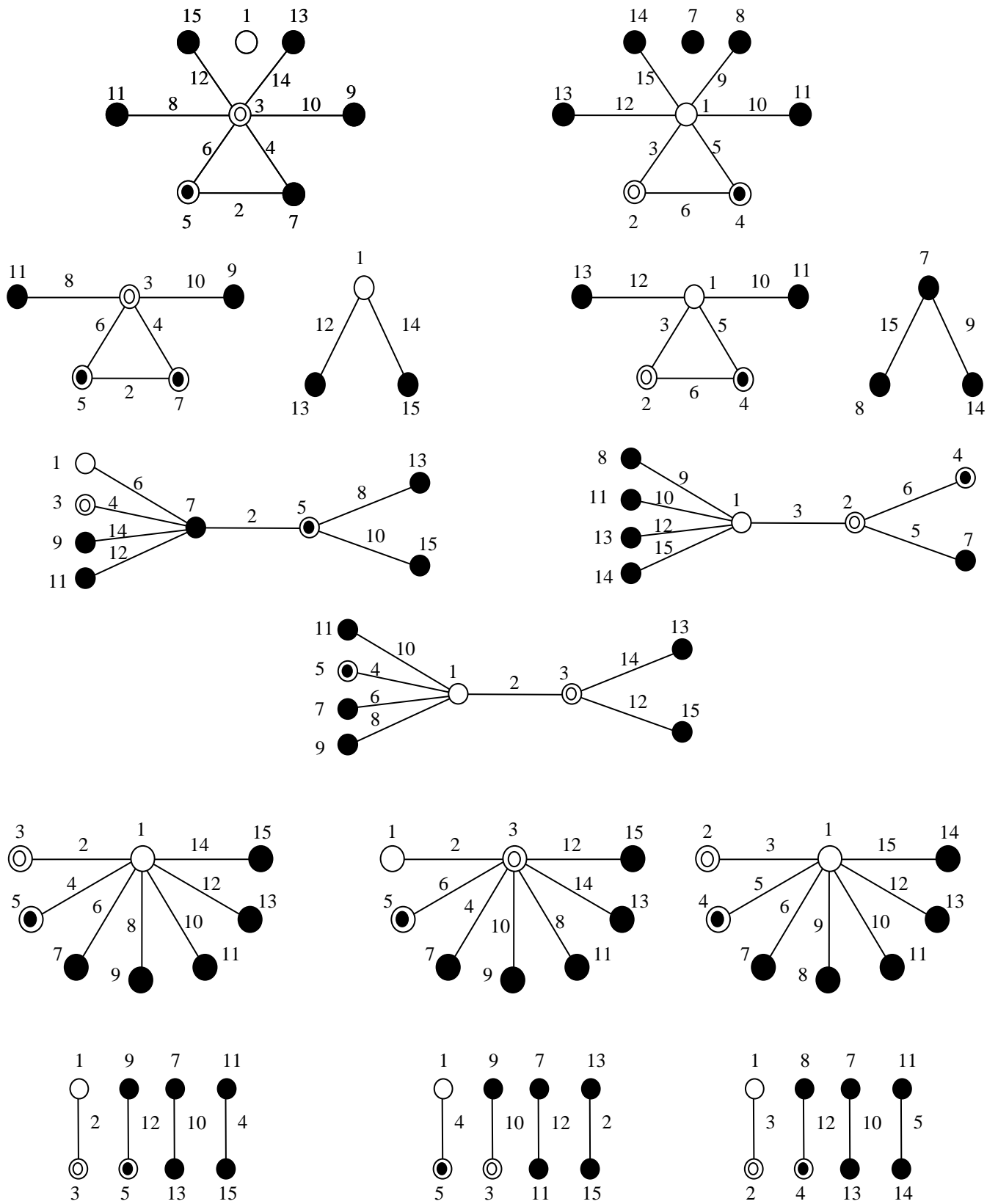


Table L₁₆ (3⁷) – Résolution IV – Facteurs quantitatifs

Cette table est une table spéciale. Elle est orthogonale au sens généralisé. Les facteurs ne sont pas aliassés par les interactions de second ordre. Par contre les interactions sont aliassées entre elles de façon relativement complexe. Cette est une excellente table pour débroussailler des facteurs à 3 niveaux autour d'un point de fonctionnement (niveau 0)

N°	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	-1	0	-1	-1
2	-1	1	0	0	-1	0	-1
3	-1	-1	1	0	0	-1	0
4	0	-1	-1	1	0	0	-1
5	-1	0	-1	-1	1	0	0
6	0	-1	0	-1	-1	1	0
7	0	0	-1	0	-1	-1	1
8	0	0	0	0	0	0	0
9	-1	0	0	1	0	1	1
10	1	-1	0	0	1	0	1
11	1	1	-1	0	0	1	0
12	0	1	1	-1	0	0	1
13	1	0	1	1	-1	0	0
14	0	1	0	1	1	-1	0
15	0	0	1	0	1	1	-1
16	0	0	0	0	0	0	0

Table L₁₈ (2¹x3⁷)

De même que la table L₁₂ (2¹¹) cette table est une table spéciale. Une interaction peut être étudiée entre les deux premières colonnes sans sacrifier une autre colonne. Les interactions entre les colonnes à trois niveaux sont réparties plus ou moins uniformément sur toutes les autres colonnes à 3 niveaux.

N°	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	2	2	2	2	2	2
3	1	1	3	3	3	3	3	3
4	1	2	1	1	2	2	3	3
5	1	2	2	2	3	3	1	1
6	1	2	3	3	1	1	2	2
7	1	3	1	2	1	3	2	3
8	1	3	2	3	2	1	3	1
9	1	3	3	1	3	2	1	2
10	2	1	1	3	3	2	2	1
11	2	1	2	1	1	3	3	2
12	2	1	3	2	2	1	1	3
13	2	2	1	2	3	1	3	2
14	2	2	2	3	1	2	1	3
15	2	2	3	1	2	3	2	1
16	2	3	1	3	2	3	1	2
17	2	3	2	1	3	1	2	3
18	2	3	3	2	1	2	3	1

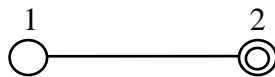


Table L₂₀ (2¹⁹)

Ce plan issu d'un plan de Plackett et Burman permet d'étudier jusqu'à 19 facteurs à 2 niveaux. Il a des propriétés du même type que la table L₁₂ (2¹¹).

Les interactions sont distribuées uniformément (en plus ou en moins du cinquième de l'interaction) dans toutes les colonnes. Il n'y a pas de graphe pour cette table, elle ne peut donc pas être utilisée pour étudier des interactions.

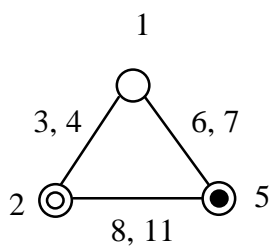
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2
3	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1
4	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2
5	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1
6	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2
7	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1
8	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2
9	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2
10	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1
11	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2
12	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2
13	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1
14	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2
15	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1
16	2	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1
17	2	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2
18	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2
19	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1
20	2	2	1	2	2	1	1	1	1	2	1	2	1	2	2	2	2	1	1
Groupe	1	2	3													4			

Table L₂₅ (5⁶)

N°	1	2	3	4	5	6
1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2
3	1	3	3	3	3	3
4	1	4	4	4	4	4
5	1	5	5	5	5	5
6	2	1	2	3	4	5
7	2	2	3	4	5	1
8	2	3	4	5	1	2
9	2	4	5	1	2	3
10	2	5	1	2	3	4
11	3	1	3	5	2	4
12	3	2	4	1	3	5
13	3	3	5	2	4	1
14	3	4	1	3	5	2
15	3	5	2	4	1	3
16	4	1	4	2	5	3
17	4	2	5	3	1	4
18	4	3	1	4	2	5
19	4	4	2	5	3	1
20	4	5	3	1	4	2
21	5	1	5	4	3	2
22	5	2	1	5	4	3
23	5	3	2	1	5	4
24	5	3	2	1	5	4
25	5	5	4	3	2	1
	a	b	ab	ab ²	ab ³	ab ⁴
Groupe	1	2				

Table L₂₇ (3¹³)

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	3
5	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	1	1	1
6	1	2	2	2	3	3	3	1	1	1	2	2	2
7	1	3	3	3	1	1	1	3	3	3	2	2	2
8	1	3	3	3	2	2	2	1	1	1	3	3	3
9	1	3	3	3	3	3	3	2	2	2	1	1	1
10	2	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1	2	3
11	2	1	2	3	2	3	1	2	3	1	2	3	1
12	2	1	2	3	3	1	2	3	1	2	3	1	2
13	2	2	3	1	1	2	3	2	3	1	3	1	2
14	2	2	3	1	2	3	1	3	1	2	1	2	3
15	2	2	3	1	3	1	2	1	2	3	2	3	1
16	2	3	1	2	1	2	3	3	1	2	2	3	1
17	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3	3	1	2
18	2	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	3
19	3	1	3	2	1	3	2	1	3	2	1	3	2
20	3	1	3	2	2	1	3	2	1	3	2	1	3
21	3	1	3	2	3	2	1	3	2	1	3	2	1
22	3	2	1	3	1	3	2	2	1	3	3	2	1
23	3	2	1	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2
24	3	2	1	3	3	2	1	1	3	2	2	1	3
25	3	3	2	1	1	3	2	3	2	1	2	1	3
26	3	3	2	1	2	1	3	1	3	2	3	2	1
27	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	1	3	2
	a	b	a b	a b ²	c	a c	a c ²	b c	a b c	a ² b c	b c ²	a b ² c	a b c ²
Groupe	1	2							3				



- 9
- 10
- 12
- 13

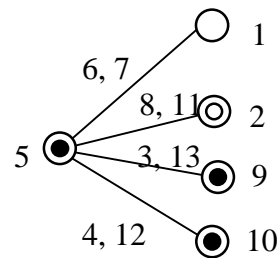
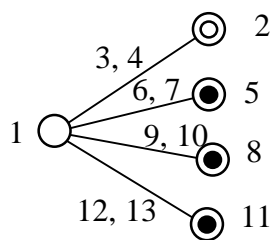


Table L₂₇ (3¹³) - Triangle des interactions

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
(1)	3	2	2	6	5	5	9	8	8	12	11	11
	4	4	3	7	7	6	10	10	9	13	13	12
	(2)	1	1	8	9	10	5	6	7	5	6	7
		4	3	11	12	13	11	12	13	8	9	10
		(3)	1	9	10	8	7	5	6	6	7	5
			2	13	11	12	12	13	11	10	8	9
			(4)	10	8	9	6	7	5	7	5	6
				12	13	11	13	11	12	9	10	8
				(5)	1	1	2	3	4	2	4	3
					7	6	11	13	12	8	10	9
					(6)	1	4	2	3	3	2	4
						5	13	12	11	10	9	8
						(7)	3	4	2	4	3	2
							12	11	13	9	8	10
							(8)	1	1	2	3	4
								10	9	5	7	6
								(9)	1	4	2	3
									8	7	6	5
									(10)	3	4	2
										6	5	7
										(11)	1	1
											13	12
											(12)	1
												11

Table L₃₂ (2³¹)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2
4	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1
5	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2
6	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1
7	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
8	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2
9	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2
10	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1
11	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1
12	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2
13	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1
14	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2
15	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2
16	1	2	2	2	2	1	1	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	1	2	2	2	2	1	1
17	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
18	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
19	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1
20	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2	1
21	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1
22	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2
23	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2
24	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1
25	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1
26	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2
27	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2
28	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1
29	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2
30	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1
31	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2
32	2	2	1	2	1	1	2	2	1	1	2	1	2	2	1	2	1	1	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2
	a	b	a	c	a	b	a	d	a	b	a	c	a	b	a	e	a	b	a	c	a	b	a	d	a	b	a	c	a	b	a
			b		c	c	b		d	d	b	d	c	c	b		e	e	b	e	c	c	b	e	d	d	b	d	c	c	b
							c				d		d	d	c				e		e	e	c		e	e	d	e	d	d	c
															d									e			e		e	e	d
																															e
Groupe	1	2	3	4								5																			

Table L₃₂ (2³¹) Triangle des interactions

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
(1)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14	17	16	19	18	21	20	23	22	25	24	27	26	29	28	31	30	
(2)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13	18	19	16	17	22	23	20	21	26	27	24	25	30	31	28	29		
(3)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12	19	18	17	16	23	22	21	20	27	26	25	24	31	30	29	28			
(4)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11	20	21	22	23	24	17	18	19	28	29	30	31	24	25	26	27				
(5)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10	21	20	23	22	25	16	19	18	29	28	31	30	25	24	27	26					
(6)	1	14	15	12	13	10	11	8	9	22	23	20	21	26	19	16	17	30	31	28	29	26	27	24	25						
(7)	15	14	13	12	11	10	9	8	23	22	21	20	27	18	17	16	31	30	29	28	27	26	25	24							
(8)	1	2	3	4	5	6	7	24	25	26	27	28	29	30	31	16	17	18	19	20	21	22	23								
(9)	3	2	5	4	7	6	25	24	27	26	29	28	31	30	17	16	19	18	21	20	23	22									
(10)	1	6	7	4	5	26	27	24	25	30	31	28	29	18	19	16	17	22	23	20	21										
(11)	7	6	5	4	27	26	25	24	31	30	29	28	19	18	17	16	23	22	21	20											
(12)	1	2	3	28	29	30	31	24	25	26	27	20	21	22	23	16	17	18	19												
(13)	3	2	29	28	31	30	25	24	27	26	21	20	23	22	17	16	19	18													
(14)	1	30	31	28	29	26	27	24	25	22	23	20	21	18	19	16	17														
(15)	31	30	29	28	27	26	25	24	23	22	21	20	19	18	17	16															
(16)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15																
(17)	3	2	5	4	7	6	9	8	11	10	13	12	15	14																	
(18)	1	6	7	4	5	10	11	8	9	14	15	12	13																		
(19)	7	6	5	4	11	10	9	8	15	14	13	12																			
(20)	1	2	3	12	13	14	15	8	9	10	11																				
(21)	3	2	13	12	15	14	9	8	11	10																					
(22)	1	14	15	12	13	10	11	8	9																						
(23)	15	14	13	12	11	10	9	8																							
(24)	1	2	3	4	5	6	7																								
(25)	3	2	5	4	7	6																									
(26)	1	6	7	4	5																										
(27)	7	6	5	4																											
(28)	1	2	3																												
(29)	3	2																													
(30)	1																														

Résolution	Nombre maxi de facteurs	Colonnes à utiliser
Plan complet	5	1, 2, 4, 8, 16
VI	6	1, 2, 4, 8, 16, 31
IV	16	1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31
III	31	Toutes

Table L₃₂ (2³¹) - Quelques graphes (proposés par Taguchi, résolution III)

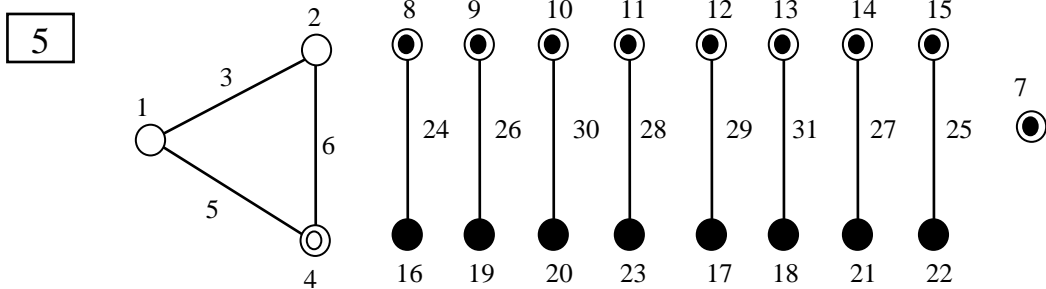
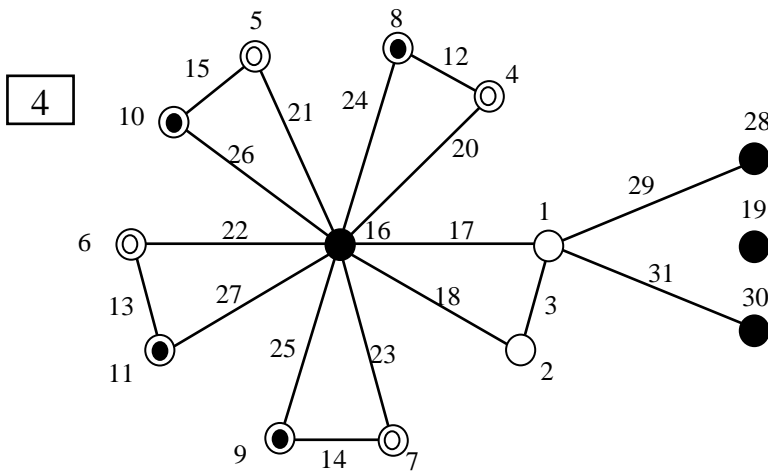
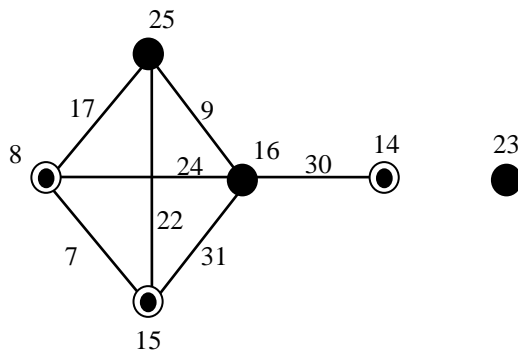
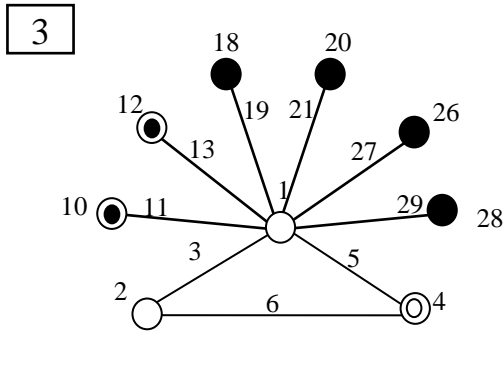
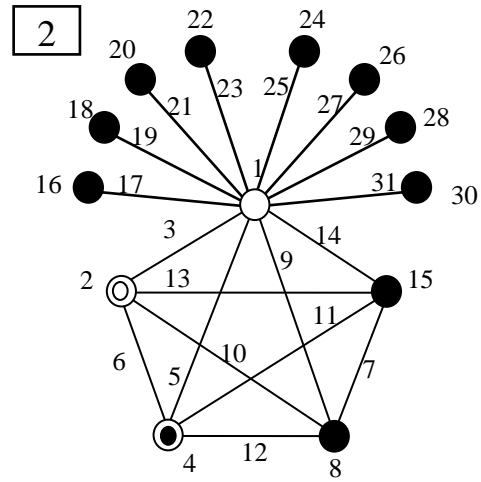
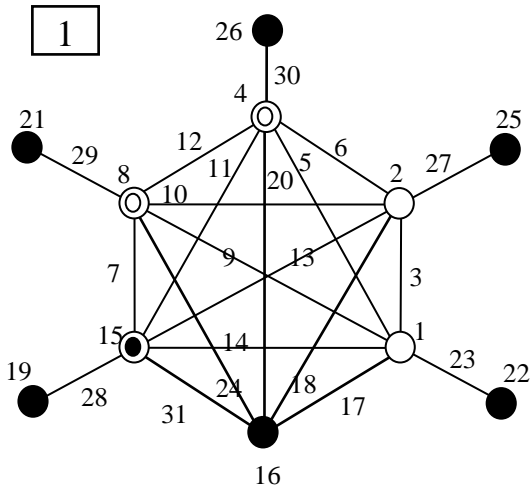


Table L₃₂ (2³¹) - Quelques graphes (Colonnes impaires, résolution IV)

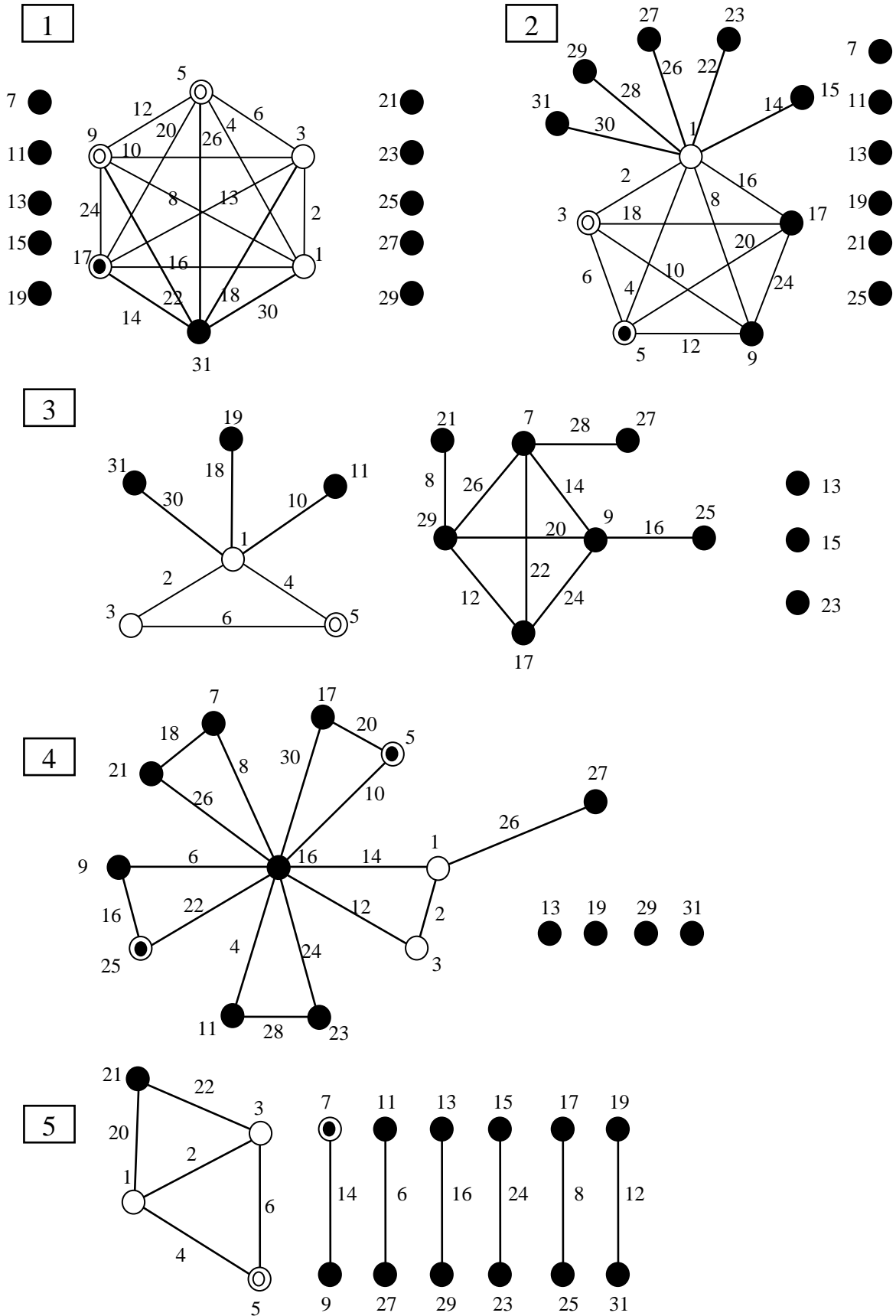


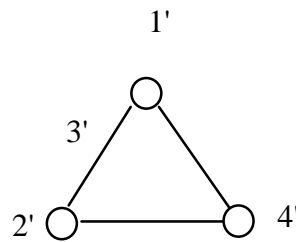
Table L₃₆ (2¹¹x3¹²)

N°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	1'	2'	3'	4'		
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1		
2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1	1	1	1
4	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	1	2	2	1	
5	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	1	1	1	2	2	1	
6	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	1	1	1	1	2	2	2	2	2	1	2	2	1	
7	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	1	1	2	3	1	2	3	3	1	2	2	3	2	1	2	1	1	
8	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	2	2	3	1	2	3	1	1	2	3	3	1	2	1	2	1	1	
9	1	1	2	2	2	1	1	1	2	2	2	3	3	1	2	3	1	2	2	3	1	1	2	2	1	2	1	1	
10	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	1	1	3	2	1	3	2	3	2	1	3	2	2	2	1	1	1	
11	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	2	2	1	3	2	1	3	1	3	2	1	3	2	2	1	1	1	
12	1	2	1	2	2	1	2	2	1	1	2	3	3	2	1	3	2	1	2	1	3	2	1	2	2	1	1	1	
13	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	1	2	3	1	3	2	1	3	3	2	1	2	1	1	1	1	2	
14	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	2	3	1	2	1	3	2	1	1	3	2	3	1	1	1	1	2	
15	1	2	2	1	2	2	1	2	1	2	1	3	1	2	3	2	1	3	2	2	1	3	1	1	1	1	1	2	
16	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	1	2	3	2	1	1	3	2	3	3	2	1	1	1	2	2	2	
17	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	2	3	1	3	2	2	1	3	1	1	3	2	1	1	2	2	2	
18	1	2	2	2	1	2	2	1	2	1	1	3	1	2	1	3	3	2	1	2	2	1	3	1	1	2	2	2	
19	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	1	2	1	3	3	3	1	2	2	1	2	3	2	1	2	2	2	
20	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	2	3	2	1	1	1	2	3	3	2	3	1	2	1	2	2	2	
21	2	1	2	2	1	1	2	2	1	2	1	3	1	3	2	2	2	3	1	1	3	1	2	2	1	2	2	2	
22	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	1	2	2	3	3	1	2	1	1	3	3	2	2	2	1	2	2	
23	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	2	3	3	1	1	2	3	2	2	1	1	3	2	2	1	2	2	
24	2	1	2	1	2	2	2	1	1	1	2	3	1	1	2	2	3	1	3	3	2	2	1	2	2	1	2	2	
25	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	1	3	2	1	2	3	3	1	3	1	2	2	1	1	1	1	3	
26	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	2	1	3	2	3	1	1	2	1	2	3	3	1	1	1	1	3	
27	2	1	1	2	2	2	1	2	2	1	1	3	2	1	3	1	2	2	3	2	3	1	1	1	1	1	1	3	
28	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	1	3	2	2	2	1	1	3	2	3	1	3	1	1	2	2	3	
29	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	2	1	3	3	3	2	2	1	3	1	2	1	1	1	2	2	3	
30	2	2	2	1	1	1	1	2	2	1	2	3	2	1	1	1	3	3	2	1	2	3	2	1	2	2	2	3	
31	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	1	3	3	3	2	3	2	2	1	2	1	1	2	1	2	1	3	
32	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	2	1	1	1	3	1	3	3	2	3	2	2	2	2	1	2	3	
33	2	2	1	2	1	2	1	1	1	2	2	3	2	2	2	1	2	1	1	3	1	3	3	2	1	2	2	3	
34	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	1	3	1	2	3	2	3	1	2	2	3	1	2	2	1	2	3	
35	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	2	1	2	3	1	3	1	2	3	3	1	2	2	2	2	1	3	
36	2	2	1	1	2	1	2	1	2	2	1	3	2	3	1	2	1	2	3	1	1	2	3	2	2	2	1	3	
Gr.	1											2											3						

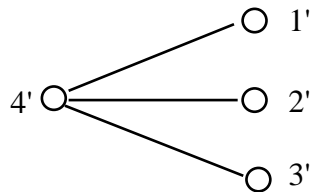
Table $L_{36} (2^{11} \times 3^{12})$ et Table $L_{36} (2^3 \times 3^{13})$

Pour construire la table $L_{36} (2^3 \times 3^{13})$:

1. Remplacer les colonnes 1 à 11 par les colonnes 1' à 4'.
2. Dans la table $L_{36} (2^{11} \times 3^{12})$, les interactions ne sont pas orthogonales aux autres colonnes. On ne peut donc pas utiliser cette table pour calculer les interactions.
3. Les graphes linéaires de la tables $L_{36} (2^3 \times 3^{13})$ sont donnés ci-dessous.



Note : 1' x 4' et 2' x 4' peuvent être déterminées sans sacrifier d'autres colonnes.



Note : Ces interactions peuvent être déterminées sans sacrifier d'autres colonnes.

Table de Snedecor pour $p = 0,95$

v2	v1 - Degré de liberté du numérateur (facteur ou interaction)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54	241,88
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16
32	4,15	3,29	2,90	2,67	2,51	2,40	2,31	2,24	2,19	2,14
35	4,12	3,27	2,87	2,64	2,49	2,37	2,29	2,22	2,16	2,11
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93
150	3,90	3,06	2,66	2,43	2,27	2,16	2,07	2,00	1,94	1,89

v2 - Degré de liberté du dénominateur (résidus)

Table de Snedecor pour $p = 0,99$

v2	v1 - Degré de liberté du numérateur (facteur ou interaction)									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4052,2	4999,3	5403,5	5624,3	5764,0	5858,9	5928,3	5980,9	6022,4	6055,9
2	98,50	99,00	99,16	99,25	99,30	99,33	99,36	99,38	99,39	99,40
3	34,12	30,82	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,55
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,46	10,29	10,16	10,05
6	13,75	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26
10	10,04	7,56	6,55	5,99	5,64	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85
11	9,65	7,21	6,22	5,67	5,32	5,07	4,89	4,74	4,63	4,54
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,64	4,50	4,39	4,30
13	9,07	6,70	5,74	5,21	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10
14	8,86	6,51	5,56	5,04	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69
17	8,40	6,11	5,19	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59
18	8,29	6,01	5,09	4,58	4,25	4,01	3,84	3,71	3,60	3,51
19	8,18	5,93	5,01	4,50	4,17	3,94	3,77	3,63	3,52	3,43
20	8,10	5,85	4,94	4,43	4,10	3,87	3,70	3,56	3,46	3,37
21	8,02	5,78	4,87	4,37	4,04	3,81	3,64	3,51	3,40	3,31
22	7,95	5,72	4,82	4,31	3,99	3,76	3,59	3,45	3,35	3,26
23	7,88	5,66	4,76	4,26	3,94	3,71	3,54	3,41	3,30	3,21
24	7,82	5,61	4,72	4,22	3,90	3,67	3,50	3,36	3,26	3,17
25	7,77	5,57	4,68	4,18	3,85	3,63	3,46	3,32	3,22	3,13
26	7,72	5,53	4,64	4,14	3,82	3,59	3,42	3,29	3,18	3,09
27	7,68	5,49	4,60	4,11	3,78	3,56	3,39	3,26	3,15	3,06
28	7,64	5,45	4,57	4,07	3,75	3,53	3,36	3,23	3,12	3,03
29	7,60	5,42	4,54	4,04	3,73	3,50	3,33	3,20	3,09	3,00
30	7,56	5,39	4,51	4,02	3,70	3,47	3,30	3,17	3,07	2,98
32	7,50	5,34	4,46	3,97	3,65	3,43	3,26	3,13	3,02	2,93
35	7,42	5,27	4,40	3,91	3,59	3,37	3,20	3,07	2,96	2,88
40	7,31	5,18	4,31	3,83	3,51	3,29	3,12	2,99	2,89	2,80
50	7,17	5,06	4,20	3,72	3,41	3,19	3,02	2,89	2,78	2,70
60	7,08	4,98	4,13	3,65	3,34	3,12	2,95	2,82	2,72	2,63
80	6,96	4,88	4,04	3,56	3,26	3,04	2,87	2,74	2,64	2,55
100	6,90	4,82	3,98	3,51	3,21	2,99	2,82	2,69	2,59	2,50
150	6,81	4,75	3,91	3,45	3,14	2,92	2,76	2,63	2,53	2,44

v2 - Degré de liberté du dénominateur (résidus)

Les plans d'expériences par la méthode Taguchi

Fiches résumés

Fiche résumé 1

Les 7 étapes de la méthode

Etapes	Les actions-clés de l'étape
<p>1 -</p> <p>Définition des objectifs et des moyens</p> <p>Décideur Spécialiste PE</p>	<p>Définir le problème à résoudre, les objectifs à atteindre. Se poser les questions :</p> <ul style="list-style-type: none"> • QUI est concerné ? • de QUOI s'agit-il ? • OÙ ?, en quel lieu ? • QUAND ?, à quel(s) moment(s) ?, quel est le planning ? • COMMENT ? Quels sont les matériels, les moyens nécessaires ? • POURQUOI réaliser une telle opération ? • Fixer un budget
<p>2 -</p> <p>Synthèse du savoir-faire</p> <p>Spécialiste PE Hommes de l'art</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Identifier les réponses et les processus de mesures • Recenser les paramètres pouvant influencer la réponse • Identifier les interactions susceptibles d'être recherchées • Dissocier les facteurs principaux des facteurs bruits • Fixer le domaine d'étude pour chacun des facteurs
<p>- 3 -</p> <p>Construction du plan</p> <p>Spécialiste PE Hommes de l'art</p>	<p>La construction du plan est une optimisation entre :</p> <ul style="list-style-type: none"> • le nombre d'essais à réaliser, • le nombre de facteurs à étudier, • le nombre de niveaux - la linéarité supposée des facteurs, • les interactions à identifier, • le nombre de répétitions nécessaires dans le plan. <p>La construction du plan nécessite les étapes suivantes :</p> <ul style="list-style-type: none"> • Détermination du choix de la table <ul style="list-style-type: none"> ⇒ Calcul du PPCM - règle de l'orthogonalité ⇒ Calcul du nombre de degré de liberté (ddl) • Eventuellement construction de colonnes à 4, 8.. niveaux • Affectation à chaque facteur d'une colonne • Détermination des alias <ul style="list-style-type: none"> ⇒ Utilisation du triangle des interactions ⇒ Par sécurité, essayer de toujours déterminer sans ambiguïté l'influence des facteurs • Détermination du nombre de répétitions en fonction de la variance résiduelle attendue

Fiche résumé 1

Les 7 étapes de la méthode (suite)

Etapas	Les actions-clés de l'étape
<p align="center">- 4 -</p> <p align="center">Conduite des essais</p> <p>Spécialiste PE Serv. opérationnels</p>	<p>Pour le bon déroulement des essais</p> <ul style="list-style-type: none"> • Répéter le premier essai pour valider le nombre de répétitions • Assister aux essais, au moins aux premiers • Tenir un cahier d'essais en notant tout (incidents, température ambiante, bon/moyen/mauvais déroulement) • Vérifier le bon déroulement de l'analyse de répétabilité, éviter de faire deux essais identiques successivement) • Noter les résultats de tous les essais et non les moyennes
<p align="center">- 5 -</p> <p align="center">Dépouillement et interprétation</p> <p>Spécialiste PE Hommes de l'art</p>	<p>Le dépouillement consiste à :</p> <ul style="list-style-type: none"> • calculer les coefficients du modèle, • établir les graphes des effets, • calculer les résidus, • faire l'analyse de la variance. <p>L'interprétation consiste à :</p> <ul style="list-style-type: none"> • étudier le sens physique du modèle notamment pour les interactions, • sélectionner les niveaux des facteurs pour un résultat optimal. Eventuellement faire une interpolation entre les niveaux des facteurs. • Calculer la réponse théorique pour une configuration optimale
<p align="center">- 6 -</p> <p align="center">Validation des résultats</p> <p>Spécialiste PE Services opérationnels</p>	<p>L'objectif de l'essai de confirmation est de vérifier que les résultats optimaux sont conformes à la prévision du modèle. En cas d'écart, rechercher les causes</p> <ul style="list-style-type: none"> • Erreur de calcul dans le modèle • Erreur dans la conduite des expériences • Facteur influant non pris en compte dans le plan • Interaction forte non retenue dans le plan
<p align="center">- 7 -</p> <p align="center">Mise en oeuvre et suivi</p> <p>Spécialiste PE Serv. opérationnels</p>	<ul style="list-style-type: none"> • Vérifier que les résultats du plan sont bien intégrés dans le savoir-faire de l'entreprise. • Diffuser les résultats pour augmenter le savoir-faire, et la compréhension des phénomènes. • Faciliter la connaissance de la méthode des PE pour de nouvelles applications.

Fiche résumé 2 - Mise en œuvre des plans d'expériences

1 - Définition des objectifs et des moyens

Définir le problème à résoudre, les objectifs à atteindre.
Se poser les questions : Qui, Quoi,
Où, Quand, Comment, Pourquoi?
Fixer un budget.



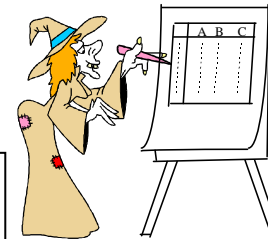
2 - Synthèse du "Savoir-faire"

Identifier les réponses et les processus de mesures.
Recenser les paramètres pouvant influencer la réponse.
Identifier les interactions susceptibles d'être recherchées.
Fixer le domaine d'étude pour chacun des facteurs.



3 - Construction du plan

Détermination du choix de la table.
Détermination des alias.
Détermination du nombre de répétitions.
Préparer les essais, une fiche par essai.



4 - Conduite des essais

Prévoir une fiche par essai pour éviter toute erreur
Répéter le 1^{er} essai pour valider le nombre de répétitions.
Assister aux essais, au moins aux premiers.
Tenir un cahier d'essais en notant toutes les conditions.



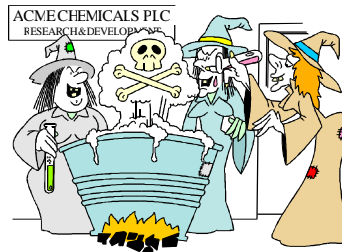
5 - Dépouillement et interprétation

Calculer les coefficients du modèle.
Établir les graphes des effets.
Faire l'analyse de la variance.
Sélectionner les niveaux des facteurs pour un
résultat optimal.
Calculer la réponse théorique pour une
configuration optimale.



6 - Validation des résultats obtenus

Faire un essai de confirmation en dehors des points testés
dans le plan d'expériences.
En cas d'écart entre la prédiction et les résultats, analyser
les causes.



7 - Mise en œuvre et suivi

Intégrer les résultats dans le savoir-faire de l'entreprise.
Diffuser les résultats pour augmenter le savoir-faire, et la
compréhension des phénomènes.
Faciliter la connaissance de la méthode des PE pour de
nouvelles applications.



Fiche résumé 3 - Utilisation des tables à 2 niveaux

Nb de facteurs	Table L ₄	Table L ₈	Table L ₁₆	Table L ₁₂	Table L ₂₀
2	**** • Plan complet Utiliser les colonnes 1 et 2 • Aucun risque			<div style="border: 1px solid black; padding: 5px;"> La notation utilisée de quatre étoiles à une étoile est attribuée en fonction : <ul style="list-style-type: none"> • du risque de confondre un effet avec une interaction de second ordre ; • de la possibilité de désaliasser tout en restant dans des plans à moins de vingt essais ; • de l'efficacité du plan (nombre de ddl/nombre d'essais). </div>	
3	*** • Fractionnaire, résolution III • Facile à désaliasser en passant au plan complet L ₈	**** • Plan complet Utiliser les colonnes 1, 2 et 4 • Aucun risque			
4		*** Fractionnaire, résolution IV • Utiliser les colonnes 1, 3, 5, 7 ou 1, 2, 4, 7 • Facile à désaliasser en passant au plan complet L ₁₆	**** • Plan complet Utiliser les colonnes 1, 2, 4 et 8 • Aucun risque		
5		** • Fractionnaire résolution III	**** • Fractionnaire, résolution V Utiliser les colonnes 1, 2, 4, 8, 15	*** • Plan fractionnaire • Ne permet pas d'étudier des interactions	
6		• Facile à désaliasser en continuant les colonnes impaires de la table L ₁₆	*** • Fractionnaire, résolution IV • Utiliser les colonnes impaires 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 ou 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14	• Choix des colonnes en fonction de la difficulté des modifications des facteurs • Idéal pour débroussailler	
7					
8					
9 à 11			* • Fractionnaire, résolution III	• Les interactions sont diluées	
11 à 15					***
15 à 19					• Plan de même type que la table L ₁₂

Fiche résumé 4

Principaux calculs

Formule de calcul des effets et des interactions

Effet de A au niveau i

$$E_{Ai} = (\text{Moyenne des réponses lorsque } A = i) - (\text{Moyenne générale})$$

Interaction A au niveau i et B au niveau j

$$I_{AiBj} = (\text{Moyenne des réponses lorsque } A=i \text{ et } B=j) - E_{Ai} - E_{Bj} - (\text{Moyenne générale})$$

Tableau d'analyse de la variance


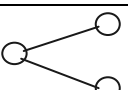
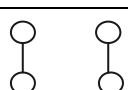
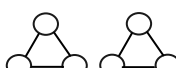
Source	Somme des carrés	ddl	variances	F _{exp}	F _{théo}	Sign?
A	$S_A = \frac{N \sum E_A^2}{n_A}$	$v_A = (n_A - 1)$	$V_A = \frac{S_A}{n_A - 1}$	$\frac{V_A}{V_R}$	$v_1 = n_A - 1$ $v_2 = v_R$	O/N
AB	$S_{AB} = \frac{N \sum I_{AB}^2}{n_A \cdot n_B}$	$v_{AB} = (n_A - 1)(n_B - 1)$	$V_{AB} = \frac{S_{AB}}{v_{AB}}$	$\frac{V_{AB}}{V_R}$	$v_1 = v_{AB}$ $v_2 = v_R$	O/N
Résidus	$S_R = \sum r^2$	$v_R = (N - \text{ddl}_{\text{modèle}})$	$V_R = \frac{S_R}{v_R}$			
Total	$S_T = \sum (Y - \bar{Y})^2$	N-1				


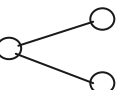
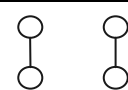
Notations utilisées :

- N : nombre d'essais dans le plan d'expériences.
- n_A : nombre de niveaux du facteur A.
- E_A : effet du facteur A.
- I_{AB} : effet de l'interaction AB.
- r : résidus.
- v_1 : premier degré de liberté pour la table de Snedecor.
- v_2 : second degré de liberté pour la table de Snedecor.
- v_R : nombre de degré de liberté des résidus.
- O/N : Oui ou Non.
- V_A : variance des effets de A.
- V_R : variance résiduelle.

Fiche résumé 5

Condition d'orthogonalité pour les plans à 2 et 3 niveaux




Condition d'orthogonalité pour les plans à deux niveaux			
Plan sans interaction		Multiple de 4	$L_4 \ L_8 \ L_{12} \ L_{16} \ L_{20} \ L_{24}$...
Plan avec interactions jointes		Multiple de 8	$L_8 \ L_{16} \ L_{24} \dots$
Plan avec interactions disjointes		Multiple de 16	$L_{16} \ L_{32} \dots$
Plan avec triangles disjointes		Multiple de 32	$L_{32} \dots$

Condition d'orthogonalité pour les plans à trois niveaux			
Plan sans interaction		Multiple de 9	$L_9 \ L_{18} \ L_{27} \ L_{36} \dots$
Plan avec interactions jointes		Multiple de 27	$L_{27} \ L_{54} \ L_{81} \dots$
Plan avec interactions disjointes		Multiple de 81	$L_{81} \dots$

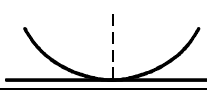
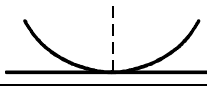


Fiche résumé 6

Fonctions pertes et ratio S/N

Fonction perte

Type	Graphe	Perte par produit	Perte moyenne
Cible		$L = K(Y - Y_0)^2$	$\bar{L} = K(\sigma^2 + (\bar{Y} - Y_0)^2)$
Mini		$L = K \cdot Y^2$	$\bar{L} = K \cdot (\bar{Y}^2 + \sigma^2)$
Maxi		$L = \frac{K}{Y^2}$	$\bar{L} = \frac{K}{\bar{Y}^2} \left[1 + 3 \left(\frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$

Ratio S/N

Type	Graphe	Ratio S/N
Nominal Type 1		$v_i = -10 \log \left[\sum (Y_i - cible)^2 \right] = -10 \log \left[(\bar{Y} - cible)^2 + \sigma^2 \right]$
Nominal Type 2		$v_i = 10 \log \left(\frac{\bar{Y}^2}{\sigma^2} \right)$
Mini		$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} Y_{ij}^2 \right] = -10 \log [\sigma^2 + \bar{Y}^2]$
Maxi		$v_i = -10 \log \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{j=n} \left(\frac{1}{Y_{ij}^2} \right) \right] = -10 \log \left[\frac{1}{\bar{Y}^2} \left(1 + 3 \frac{\sigma^2}{\bar{Y}^2} \right) \right]$

Dans tous les cas, on cherche à maximiser le ratio S/N

Bibliographie

- Alexis J.**- *Pratique industrielle de la méthode Taguchi* - Afnor 1995
- Alexis J.**- *Pratique industrielle des plans d'expérience* - Afnor 1999
- American society for Quality control** - *Glossary and tables for statistical quality control* - 1983
- American Supplier Institute, Inc** - *Orthogonal arrays and linear graphs* - ASI - 1987
- Benoist D.**- *Notions sur les plans d'expériences* - Technip - 1974
- Benoist D. Toubier Y. - Germain S.**- *Plans d'expériences : construction et analyse* - Lavoisier Tec. et doc. - 1994
- Bisgaard S. - Fuller H. T.** - « *Sample size estimates for 2^{k-p} designs with binary responses* » - *Journal of quality Technology*, 27(4) - 1995
- Bothe K.** - *World class quality* - Amacom - 1991
- Box G. Draper N.** - *Evolutionary operation* - Wiley interscience - 1968
- Box G. - Draper N.** - *Empirical model building and response surfaces* - Wiley interscience - 1987
- Box G. Hunter W. G. - Hunter J. H.** - *Statistics for experimenters* - Wiley interscience - 1978
- Cetama** - *Statistique appliquée à l'exploitation des mesures* - Masson - 1986
- Costesèque M.** - *Contrôle et analyse statistiques, fiabilité* - Planec organisation - 1989
- Draper N. - Smith H.** - *Applied regression analysis* - second edition - Wiley interscience - 1981
- Ealey Lance A.** - *Les méthodes Taguchi dans l'industrie occidentale* - Les Éditions d'oOrganisation - 1990
- Ealey Lance A.** - *Quality by design* - ASI Press – 1988
- Expérimentique** - "Les Plans d'Expériences, une approche pragmatique et illustrée". - 2005
- Goupy J.** - *La méthode des plans d'expériences* - Dunod – 1988
- Goupy J.** - *Introduction aux plans d'expériences* – Dunod - 2003
- Institut des méthodes Taguchi** - « *Initiation à l'engineering de la qualité* » (séminaire) - 1989
- Lebart L. Morineau A. - Fénelon J.-P.** - *Traitement des données statistiques* - Dunod - 1979

- Linder R.** - *Les plans d'expériences : Un outil indispensable à l'expérimentateur* - Presses Ponts et Chaussées - 2005
- Lochner R. - Matar J.** - *Designing for quality* - Quality ressources - 1994
- Montgomery D.** - *Design and analysis of experiments* - Wiley - 1991
- Peace G.** - *Taguchi methods* - Addison wesley - 1993
- Pillet M.** - *Appliquer la Maîtrise Statistique des Procédés (MSP/SPC)* - Les Éditions d'Organisation - 1997
- Pillet M.** - « Plans d'expériences, l'approche du Docteur Taguchi » - La technique moderne - 1995
- Pillet M.** - « Les plans d'expériences » - Technologie, n° 66 - 7 pages - Février 1994
- Phadke M.** - *Quality engineering using robust design* - Prentice-Hall international - 1989
- Rochon S.** - *Méthodologie de conception robuste et fiable des produits industriels associant l'approche expérimentale et l'expertise*, Thèse Université de Savoie - 1996
- Rochon S. - Pillet M. - Courtois A.** - « Méthode de calcul de fiabilité prévisionnelle associant plans d'expériences et jugements d'experts » - 2^e Congrès Qualité - Angers 1997
- Sisson J. C.** - Support de séminaire - Vigier conseil international - 1990
- Sado G. - Sado M. G.** - *Les plans d'expériences : de l'expérimentation à l'assurance qualité* - Afnor Technique - 1991
- Schimmerling P.** - Pratique des plans d'expériences - Tech.& Doc./Lavoisier - 1998
- Souvay P.** - *Plan d'expérience, Méthode Taguchi* - Afnor collection A savoir - 2002
- Taguchi G.** - « On-line and off-line Quality control system » - Conférence - Tokyo 1978
- Taguchi G.** - *System of experimental design (tomes I et II)* - Unipub/Kraub - 1987
- Taguchi G.** - Konishi S. - *Orthogonal arrays and linear graph* - American Supplier Institute Press - 1987
- Taguchi G. - Elsayed A. - Hsiang T.** - *Quality Engineering in production system* - Mc Graw-Hill international - 1989
- Tassi P.** - *Méthodes statistiques* - Economica - 1989
- Vigier M.** - *Pratique des plans d'expériences* - Les Éditions d'Organisation - 1988
- Wu Y.** - *Introduction to dynamic Characteristics* - American Supplier Institute, 1990

Les plans d'expériences par la méthode TAGUCHI

Maurice PILLET

La plupart des ingénieurs et techniciens améliorent leurs produits ou leurs processus de production à partir d'essais. Malheureusement, les stratégies couramment utilisées pour mener ces expériences sont souvent informelles et peu performantes. Elles conduisent à de nombreux essais difficiles à exploiter. La méthode des plans d'expériences permet d'adopter une démarche formelle pour réaliser des essais qui évite les coûteux inconvénients d'une stratégie de tâtonnement

Cet ouvrage a été conçu pour permettre au professionnel d'aborder les concepts de base sur les plans d'expériences et de réaliser très rapidement ses premiers plans. L'accent a été mis sur une approche pédagogique des plans d'expériences notamment dans les premiers chapitres volontairement dépourvus de calculs statistiques afin de permettre au lecteur de se consacrer à l'essentiel.

Les premiers chapitres de l'ouvrage sont consacrés aux plans d'expériences complets qui sont très faciles à mettre en œuvre. Les chapitres suivants abordent les plans fractionnaires en utilisant la démarche du Docteur Taguchi qui simplifie considérablement la création d'un plan d'expériences. Des stratégies originales sont proposées afin d'élaborer des plans d'expériences en limitant les risques pour l'expérimentateur.

Les professionnels chevronnés pourront affiner leur pratique en abordant la démarche de conception robuste fondée sur les plans produits de Taguchi. Un chapitre important est consacré à l'optimisation des systèmes dynamiques dont l'efficacité est redoutable.

Cet ouvrage s'adresse :

- **aux professionnels** cadres et techniciens de tous secteurs industriels qui souhaitent acquérir ou approfondir des connaissances pour améliorer leur efficacité dans la réalisation de leurs essais.
- **aux enseignants** des lycées techniques et des universités pour la préparation de leur cours ;
- **aux étudiants** des filières à caractère industriel post baccalauréat.



Maurice PILLET est professeur des Universités à l'IUT d'Annecy, département **Q**ualité, **L**ogistique **I**ndustrielle et **O**rganisation, Certifié au grade de Fellow par l'APICS, il est directeur de recherche au laboratoire SYMME de l'Université de Savoie. Il pratique depuis de nombreuses années le conseil auprès d'entreprises de différents secteurs d'activités dans le domaine des méthodes et outils de la qualité. Son ouvrage est constamment enrichi de cette double expérience d'universitaire et de praticien.

Code éditeur 978-2-9539428 – ISBN 978-2-9539428-0-4

